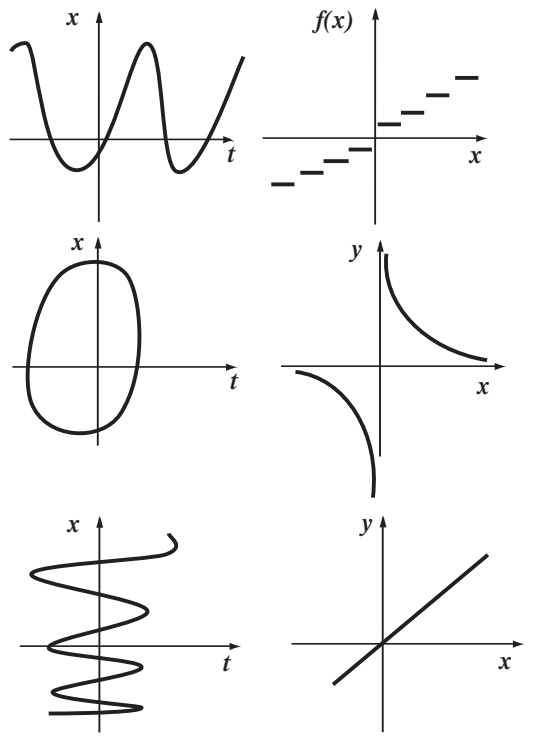
Unidad 0
Repaso Funciones

1.0- Indicar cuáles de los siguientes gráficos representa una función en el conjunto R de los números reales.



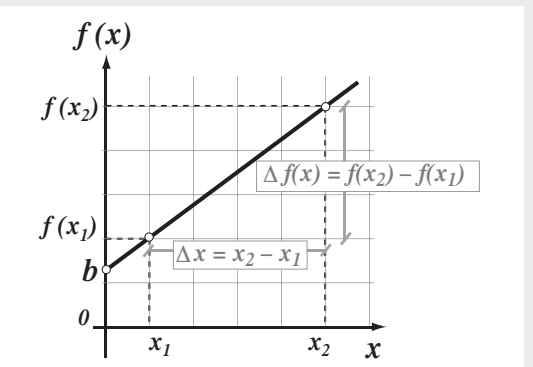
Funciones lineales

Una función *lineal* es una función $f : R \rightarrow R$ definida por la expresión:

$$y = f(x) = ax + b$$

donde a y b son numeros reales.

El gráfico de $f(x)$ es una recta no vertical donde $a = \Delta f(x)/\Delta x$ es la pendiente y b es la ordenada al origen.



1.1- Indicar cuáles de las siguientes funciones son lineales.

a) $f(x) = 0$
b) $f(x) = 2x + 3$
c) $f(x) = -1/3\ x$
d) $f(x) = 5x^2 - x$
e) $f(x) = (x - 1)^2 + 3x$
f) $f(x) = 2x + 3$; para $x \leq 0$ y $f(x) = 3$ para $x \geq 0$

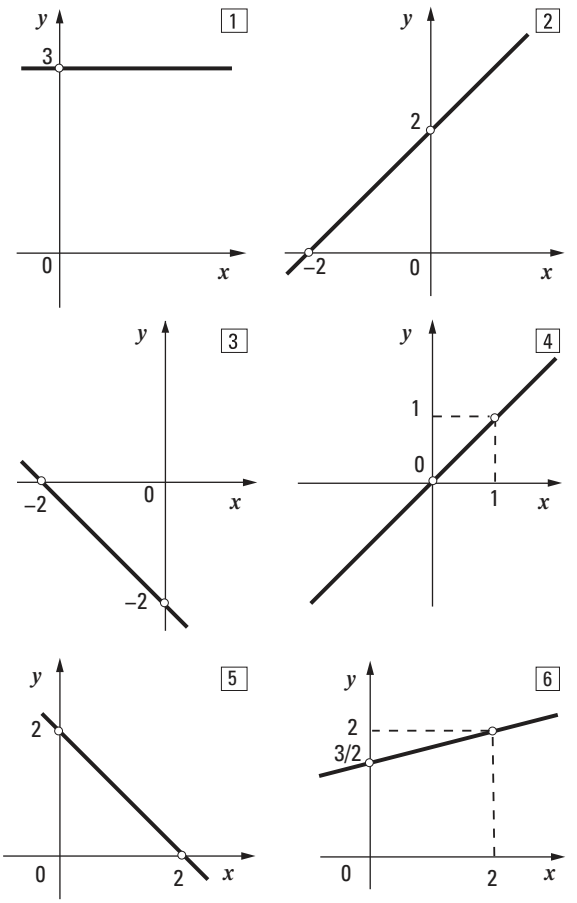
1.2- Determinar la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3$
b) $f(x) = -3x$
c) $f(x) = 4 - 1/5\ x$
d) $f(x) = (5x + 8)/3$

1.3- Graficar:

a) $y = 3$
b) $y = 3x$
c) $-1/2\ x + y - 4 = 0$
d) $3y - 5x - 8 = 0$

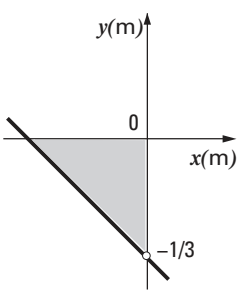
1.4- A partir de los gráficos, obtener la pendiente y la ordenada al origen para cada una de las siguientes funciones.



1.5- Dada la recta

$y = ax - 1/3$

y sabiendo que en cada término la unidad es el metro (m), determinar el valor de a para que el área de la figura sea de 0,5 m^2.



1.6- Dadas dos rectas:
1: $-2x + 3y - 3 = 0$ **2**: $3cx + y + d = 0$
determinar el valor de c y los posibles valores de d para que sean:
i) coincidentes
ii) paralelas y distintas
iii) perpendiculares.

Sistemas de ecuaciones

1.7- Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Graficar ambas rectas e interprete el resultado hallado, o indicar si el sistema es incompatible.
a) $x - 3y = 1$ $2x + 6y = 4$
b) $8y = x + 5$ $17 = 2y + (1/5)x$
c) $5x + y - 4 = 0$ $10x + 2y = 4$
d) $2x = 3y - 1$ $4x = 6y + 2$
e) $x + y = 3$ $x - y = 25$

1.8- Un comerciante compra 60 televisores y 60 DVD's pagando en total al proveedor $34.000. Si vende los televisores con un recargo del 8 % sobre el costo y los DVD's con un recargo del 10 % sobre el costo, obtiene $37.080.
¿Cuánto pagó el comerciante al proveedor por cada televisor y cada DVD?

1.9- La suma de la base y de la altura de un rectángulo es igual a 25 cm. Si la base midiera 15 cm más sería 20 cm mayor que el triple de la altura. Calcular el área del rectángulo.

Funciones cuadráticas: parábolas

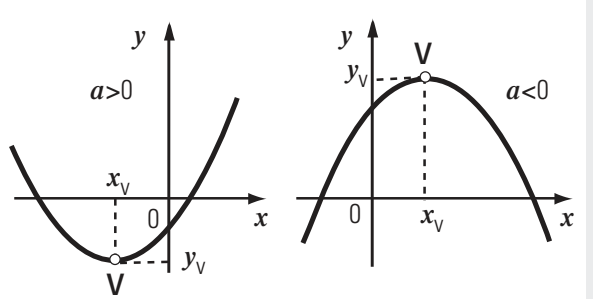
Una función *cuadrática* es una función $f : R \to R$ definida por la expresión

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

El gráfico de una función cuadrática es una *parábola* con eje de simetría vertical, en la abscisa del vértice: $\mathbf{V} = (x_v , y_v)$

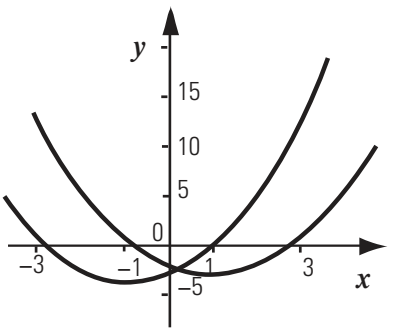
El signo de a indica la concavidad de la parábola: es hacia arriba si $a > 0$ y es hacia abajo si $a < 0$, según se observa en la figura.

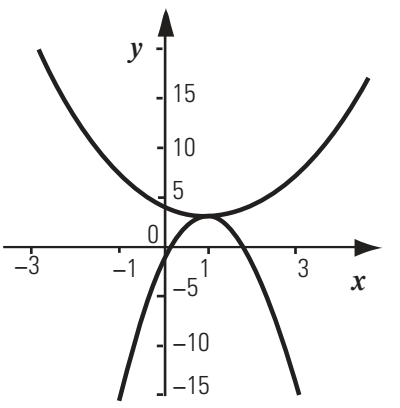


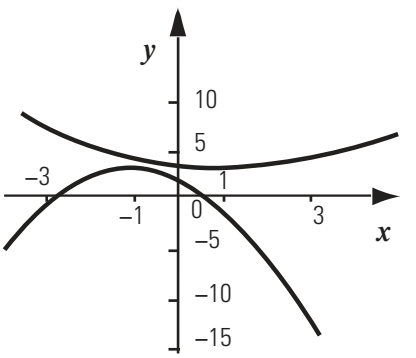
1.10- A partir del gráfico $y = x^2$, representar gráficamente las siguientes funciones cuadráticas indicando, en cada caso, si se produjo un desplazamiento vertical, horizontal o cambio de la concavidad.

a) $y = -2x^2$
b) $y = (x - 5)^2$
c) $x^2 + 4 - y = 0$

1.11- Relacionar cada una de las siguientes parábolas con la ecuación correspondiente.







a) $y = (x - 1)^2 - 3$
b) $y = 1/4\ (x - 1)^2 + 3$
c) $y = -(x + 1)^2 + 3$
d) $y = (x - 1)^2 + 3$
e) $y = -4\ (x - 1)^2 + 3$
f) $y = (x + 1)^2 - 3$

Ceros o raíces

Los *ceros* o *raíces* x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ pueden obtenerse reemplazando los coeficientes a, b, c en las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

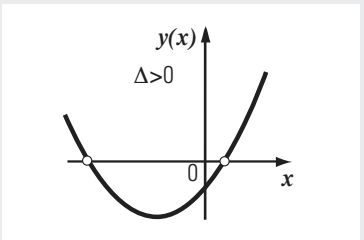
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión dentro de la raíz cuadrada,

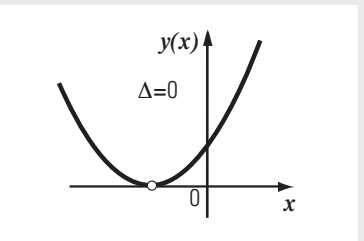
$$b^2 - 4ac,$$

se llama *discriminante* y se denota con la letra griega delta: Δ.

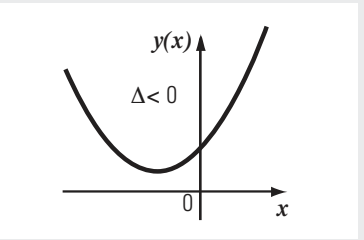
• Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.



• Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una raíz real doble.



• Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.



1.12- Sabiendo que el vértice es el punto medio entre las dos raíces de la función, verificar que:

$$x_V = -b / (2a)$$

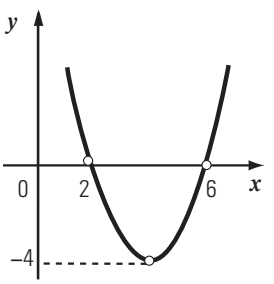
$$y_V = -(b^2 - 4ac) / (4a)$$

1.13- Hallar todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones y verificar, cuando corresponda, el resultado obtenido.

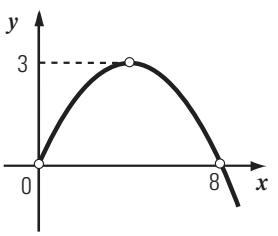
a) $x^2 - 9 = 0$
b) $5x^2 - 2x = 0$
c) $(x + 3)^2 - 4 = 0$
d) $(x - 2)^2 + 1 = 0$
e) $3x^2 = 4 - x$
f) $6x^2 + 21x = 12$

1.14- Hallar, en cada caso, la expresión de la función cuadrática utilizando los datos indicados en los gráficos.

a)



b)



Unidad 0
Repaso Análisis Matemático

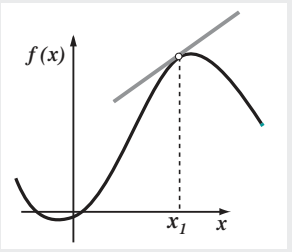
Derivadas e integrales

La *derivada* y la *integral* son dos conceptos centrales del análisis matemático, que deben saber manejar en este curso. Ambos tienen muchas aplicaciones en la Física, Química, Biología, Ingeniería, Economía, Sociología, entre otras. En el ejercicio **2.6** se explora cómo un concepto es el inverso del otro.

La *derivada* se aplica en casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación.

Su interpretación gráfica es la pendiente de la recta tangente.

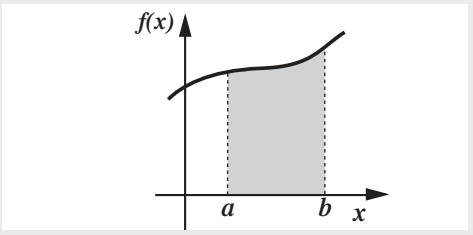
Así, en el gráfico la pendiente de la línea gris corresponde a la derivada de $f(x)$ en el punto x_1.



La derivada de la función $f(x)$ se denota como $f'(x)$ o como $df(x)/dx$. En el caso particular que la función dependa del tiempo, $g(t)$, es común utilizar la notación $\dot{g}$ para la derivada.

Los primeros ejemplos que veremos corresponden al estudio del movimiento, la velocidad es la derivada de la función que representa la posición de un objeto con respecto al tiempo y la aceleración es la derivada de la función que representa la velocidad del mismo con repecto al tiempo.

La *integral* se aplica al cálculo de áreas y volúmenes, y su interpretación gráfica es el área sombreada debajo de una curva.



Así en el gráfico la integral definida de $f(x)$ entre a y b corresponde al área sombreada y se denota

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

2.1- Calcular por definición las siguientes derivadas:

a) $f(x) = 3x + 4$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = 1/x$

2.2- Dada la ecuación $f(x) = ax^2+bx+c$ encontrar la posición del vértice.

2.3- Calcular las derivadas que siguen $f'(x)= df(x)/dx$, y luego especificar el valor para $x_0 = 0{,}2$.

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = 2$

c) $f(x) = 2x^2 +3$ d) $f(x) = 10x^2 -x+2$

e) $f(x) = 2/x$ f) $f(x) = ln\ (x)$

g) $f(x) = e^x$ h) $f(x) = e^{-x}$

i) $f(x) = sen\ (x/4) + cos\ (x/\pi)$

j) $f\ (x) = tan(x)$

2.4- Para cada una de las siguientes funciones determinar, si existen, máximos y mínimos relativos y/o absolutos, en el conjunto [a,b].

a) $f\ (x) = x^3 + x,$ en [–1, 2]

b) $f\ (x) = x^3 - x^2 - 8x + 1,$ en [–2, 2]

c) $f(x) = x/(x+1),$ en R

d) $f\ (x) = sen(x) + cos(x),$ en [0, π/2]

2.5- Calcular los puntos en que la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje x.

RTA: A (3; –22) ; B(–1; 10).

2.6- Dada la ecuación $x\ (t) = 3t^2 - 2t - 1$, dónde x se expresa en metros y t en segundos.

a) Calcular la derivada de $x(t)$, $x'(t)$, en los puntos $t = 0$ s, 1 s, 2 s y 3 s. ¿Qué unidades tiene $x'(t)$?

b) Graficar en un mismo gráfico $x(t)$ y sus derivadas evaluadas en los puntos del item a).

c) Calcular la derivada segunda de $x(t)$, $x''(t)$, en los puntos $t = 0$ s, 1 s, 2 s y 3 s. ¿Qué unidades tiene x"(t)?

d) Graficar en un mismo gráfico $x'(t)$ y sus derivadas, $x''(t)$, evaluadas en el item c).

RTA: a) –2 m/s; 4 m/s; 10 m/s; 16 m/s;
b) De elaboración personal;
c) 6 m/s^2; d) De elaboración personal.

2.7- Dada la función
$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
a) Encontrar las raíces.
b) Calcular la derivada primera de $f(x)$, $f'(x)$, y evaluar para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.
c) Calcular la derivada segunda de $f(x)$, $f''(x)$, y evaluar para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.
d) Graficar la función e interpretar geométricamente las distintas derivadas.

2.8- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{2} \left(u^2 + 1\right) du$ b) $\int_{0}^{x} \operatorname{sen} u \; du$

c) $\int_{x}^{\pi} \cos u \; du$ d) $\int_{1}^{\infty} 1/u^2 \; du$

e) $\int_{x}^{0} u \; \operatorname{sen} u \; du$ f) $\int_{-2}^{x} \left(e^{-u} + 1\right) du$

2.9- Por inspección de los resultados obtenidos en el ejercicio **2.3**, calcular:

a) $\int_{0}^{x} 2 \, du$

b) $\int_{0}^{x} 1/u \, du$

c) $\int_{0}^{x} 4u \, du$

d) $\int_{0}^{\infty} 2/u^2 \, du$

e) $\int_{x}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} u + \frac{1}{4} \cos u\right) du$

f) $\int_{0}^{x} u \left(e^{-u} - 1\right) du$

OPTATIVOS

2.10- ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico, de radio R = 2 m, si se está vaciando uniformemente a razón de 3000 litros por minuto?

RTA = – 750/π litros/(min.m^2) = –0,750/π m/min.

2.11- Se está llenando un globo de forma esférica con gas a razón de 50 cm^3/s. Calcular la velocidad a la que está aumentando el radio del globo, R, cuando su valor es R = 5 cm.

RTA = 1/(2 π) cm/s = 0,16 cm/s.

2.12- Una masa esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de 50 cm^3 por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide 15 cm?

RTA = –1/(18 π) cm/min = –0,0177 cm/min.

2.13- Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función, $f(t)$, que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 10^6 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 10^6 \cdot e^{(t-2)} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcular la tasa de variación media de la población en los intervalos [0, 2] y [0, 4].

RTA: 0 y 1,59 x 10^6

b) Calcular la tasa de variación instantánea en $t = 4$.

RTA: 7,39 x 10^6

2.14- ¿Cómo varían las respuestas en el ejercicio anterior si la función, $f(t)$, que representa la población de la colonia con el tiempo es:
$f(t) = 5000 + 1000\, t^2 \quad t \geq 0$

RTA: a) 2000 y 4000;
b) 8000.

Unidad 1
Magnitudes físicas

1_Magnitudes y unidades

1- ¿Qué objetos, instrumentos o aparatos de medición conoce para medir longitudes, corrientes eléctricas, masa, peso? Enumerarlos y caracterizarlos.

2- ¿Cuáles de las siguientes magnitudes son fundamentales en el sistema MKS-Internacional?

Área	Volumen
Masa	Aceleración
Fuerza	Velocidad

3- Completar los siguientes enunciados, adoptando la notación científica, por ejemplo:
2000 m = $2x10^3$ m

a) En 800 gramos hay _____ kilogramos.

b) En 1000 cm hay _____ pulgadas.

c) 83 horas equivalen a _____ minutos o a_____ segundos.

d) Un pie equivale a _____ milímetros.

e) 16 km equivalen a _____ centímetros.

4- El espesor de una moneda es de 2 mm, ¿cuál es el espesor total de 6 monedas superpuestas una sobre la otra? Expresar el resultado en nm, en km y en m.

5- Calcular cuántos segundos tarda un haz de luz enviado desde la Tierra a la Luna en ir y volver, sabiendo que la distancia media entre la Tierra y la Luna es 384400 km (238,855 millas), y que un haz de luz recorre 3 x 10^8 m en un segundo.

6- Expresar 320 kg/m^3 en gr/cm^3.

7- Si x y x_0 son longitudes, v_0 es una velocidad, a es la aceleración y, finalmente, t y t_0 son tiempos, demostrar que las expresiones siguientes son dimensionalmente correctas:

$$x = x_0 + v_0 (t - t_0) + 1/2\ a (t - t_0)^2;$$

$$v - v_0 = a (t - t_0)$$

8- Analizando las dimensiones de las siguientes ecuaciones indicar cuáles son incorrectas. ¿Puede asegurar que las restantes son válidas?

x: posición, v: velocidad, a: aceleración, t: tiempo, F: Fuerza, V = Volumen, A = área; h = altura. (Obtener de las tablas de la página siguiente las unidades de cada una de las magnitudes involucradas).

$$t = v_0^2\ sen\alpha\ /\ (3a) \qquad x - x_0 = v_0^2\ /\ (2a)$$

$$\tfrac{1}{2}\ m\ v^2 = F\ d^2 \qquad F/A = m\ a\ h\ /\ V$$

$$m\ v = F\ (t - t_0)^2$$

9- Considere un promedio de 60 latidos por minuto y calcule el número total de latidos durante una vida de 80 años.

10- Los cabellos crecen en promedio 0,35 mm diarios. ¿Cuántos km crecerán en un segundo?

11- Una persona en reposo realiza 12 respiraciones por minuto; si en cada entrada y salida de aire moviliza 500 ml, ¿cuantos m^3 movilizará en un día?

12- Área de superficie corporal (ASC) es la medida o cálculo de la superficie del cuerpo humano, o superficie de su piel. La manera más simple de calcularlo es con la siguiente ecuación:

$$ASC = \sqrt{\frac{Peso \cdot Altura}{36\ \frac{kgf}{m^3}}}$$

Calcule su propia ASC en metros cuadrados y exprésela en centímetros cuadrados.

Prefijos más usados

Prefijo	Símbolo	Número		Notación exponencial
exa	E	1.000.000.000.000.000.000	un trillón	10^{18}
peta	P	1.000.000.000.000.000	mil billones	10^{15}
tera	T	1.000.000.000.000	un billón	10^{12}
giga	G	1.000.000.000	mil millones	10^{9}
mega	M	1.000.000	un millón	10^{6}
kilo	k	1.000	mil	10^{3}
hecto	h	100	cien	10^{2}
deca	da	10		10^{1}
ninguno		1	una decena, diez	10^{0}
deci	d	0,1	un décimo	10^{-1}
centi	c	0,01	un centésimo	10^{-2}
mili	m	0,001	un milésimo	10^{-3}
micro	μ	0,000001	un millonésimo	10^{-6}
nano	n	0,000000001	un milmillonésimo	10^{-9}
pico	p	0,000000000001	un billonésimo	10^{-12}
femto	f	0,000000000000001	un milbillonésimo	10^{-15}
atto	a	0,000000000000000001	un trillonésimo	10^{-18}

Unidades básicas

Magnitud	Nombre	Símbolos
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Unidades SI derivadas expresadas a partir de unidades básicas y suplementarias.

Magnitud	Nombre	Símbolos
Superficie	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Velocidad	metro por segundo	m/s
Aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2
Número de ondas	metro a la potencia menos uno	m^{-1}
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s
Aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^2

Unidades SI derivadas con nombres y símbolos especiales.

Magnitud	Nombre (Símbolo)	Unidades SI básicas o derivadas
Frecuencia	hertz (Hz)	s^{-1}
Fuerza	newton (N)	$m{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$
Presión	pascal (Pa)	$m^{-1}{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$ o $N{\cdot}m^{-2}$
Energía, trabajo	joule (J)	$m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$ o $N{\cdot}m$
Potencia	watt (W)	$m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-3}$ o $J{\cdot}s^{-1}$

Unidades derivadas sin dimensión.

Magnitud	Nombre	Símbolo
Ángulo plano	Radián	rad
Ángulo sólido	Estereorradián	sr

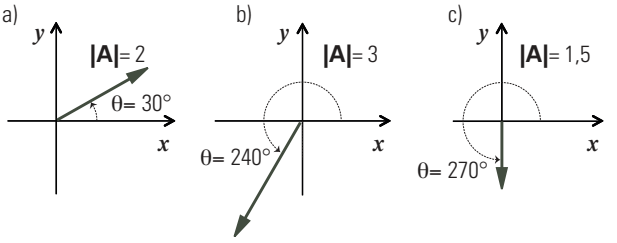
2_Vectores

En este capítulo los vectores se denotan con letra mayúscula y negrita; y su módulo se indica entre barras: **A, |A|.**

1- Determinar el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Representar gráficamente.

a) **A**=(– 4; 3) b) **B**=(2; 0)
c) **C**=(–2; – 3) d) **D**=(0; – 5)

2- Hallar las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



3- Hallar analíticamente las componentes polares, módulo y ángulo con el eje horizontal x, **|C|** y θ respectivamente, del vector **C** = **A** + **B**.

a) **A** =(–3; 2) **B** =(–2; 5)
b) **A** =(1; –1,732) **B** =(1; –1,732)
c) **A** =(–2; –4) **B** =(2; 4)
d) **A** =(0; –2) **B** =(–2; 0)
e) **A** =(2; 2) **B** =(–2; 2)

4- Dados los vectores **A** y **B** indicados, hallar gráficamente su suma o *resultante*, y su diferencia **A** – **B**.

a) **A**=(–3; 2) **B**=(–2; 5)
b) **A** tal que **|A|**=2 θ = 240 °
B tal que **|B|**=3 θ = 135 °
c) **A** = (–2; 2) **B** = (–5; 5)

5- Sean **A** y **B** los vectores dados en el ejercicio anterior. Hallar analíticamente las componentes cartesianas del vector **A** + **B**, y del **A** – **B**. ¿El módulo del vector suma, **A** + **B**, es igual a la suma de los módulos de **A** y de **B**?

6- Decir si es *Verdadero* o *Falso* y justificar:

a) El módulo del vector **A** + **B** es siempre igual a la suma de los módulos de **A** y de **B**.

b) El módulo del vector **A**+**B**, puede ser menor que la suma de los módulos de **A** y de **B**.

c) El módulo del vector **A**+**B** es siempre mayor al módulo del vector **A** – **B**

d) El módulo del vector **A** + **B** puede ser menor que el módulo del vector **A** – **B**

e) El módulo del vector **A** – **B**, es siempre igual la resta de los módulos de **A** y de **B**.

7-¿Qué propiedades tienen los vectores **A** y **B** tales que:

a) **A**+**B**=**C** y **|A|**+**|B|**=**|C|** b) **A**+**B**= **A** – **B**.
c) **A**+**B**=**C** y $|\mathbf{A}|^2+|\mathbf{B}|^2=|\mathbf{C}|^2$

8- Hallar el vector que tiene origen en el punto **A** y extremo en el punto **B**:
a) **A**=(2; –1) y **B**=(–5; –2).
b) **A**=(2; –5; 8) y **B**=(–4; –3; 2).

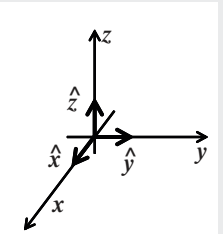
9- Encontrar y graficar para el ejercicio **4** el vector **C** tal que **C** + (**A** + **B**)=0, al que más adelante llamaremos *equilibrante del sistema*.

10- Sabiendo que los vectores **A** y **B** son los dados en el ejercicio 4. Calcular para cada caso el vector **D** que cumple:
(I) **A** + **D** = **B**
(II) **A** + **B** + **D** = **F** = (10; 10).

Versor

Un *vector unitario* o *versor* es un vector de módulo uno.

Los versores cartesianos permiten expresar analíticamente los vectores por medio sus componentes cartesianas.



11- Escribir los vectores del ejercicio **1** utilizando versores.

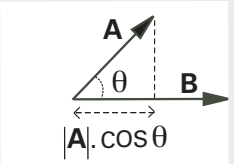
12- Dados los vectores: $\mathbf{A} = 9\,\hat{x} - 8\,\hat{y} + 6\,\hat{z}$; $\mathbf{B} = -1\,\hat{x} + 2\,\hat{y} - 4\,\hat{z}$ y $\mathbf{C} = -6\,\hat{y} - 8\,\hat{z}$, efectuar las siguientes operaciones:
a) (**A** – **B**)/ |**C**| + **C**
b) 5 **A** – 2**C**
c) –2 **A** + **B** – (**C**/2)

Producto Escalar

Se define *producto escalar* de dos vectores

$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos\theta$,

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.



13- Sean $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, los versores asociados con las direcciones de los ejes cartesianos de la terna derecha del recuadro gris intitulado "**Versor**".
$\hat{x} = (1; 0; 0)$ $\hat{y} = (0; 1; 0)$ $\hat{z} = (0; 0; 1)$
Calcular:
a) $\hat{x} \bullet \hat{x}$, $\hat{x} \bullet \hat{y}$, $\hat{x} \bullet \hat{z}$
b) $\hat{y} \bullet \hat{x}$, $\hat{y} \bullet \hat{y}$, $\hat{y} \bullet \hat{z}$
c) $\hat{z} \bullet \hat{x}$, $\hat{z} \bullet \hat{y}$, $\hat{z} \bullet \hat{z}$

14- Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demostrar que si:
$\mathbf{A} = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$
$\mathbf{B} = B_x\,\hat{x} + B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z}$
entonces:

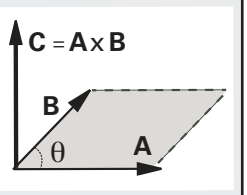
$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

15- Efectuar el producto escalar de los vectores **A** y **B** y diga si en algún caso **A** es perpendicular a **B**.
a) $\mathbf{A} = 3\,\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z}$ $\mathbf{B} = -\hat{x} + 3\,\hat{z}$
b) **A** = (2; 3; –1) **B** = (6; –5; 2)
c) |**A**| = 3, |**B**| = 2 y $\theta = 60°$ (θ: ángulo entre **A** y **B**)

Producto Vectorial

Se define el *producto vectorial* como

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$
tal que:



• |**C**| = |**A**| . |**B**| sen θ,
donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

• **C** es un vector cuya dirección es perpendicular al plano determinado por **A** y **B**., y cuyo sentido lo indica la regla de la mano derecha.

16- Sean $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, los versores de la terna derecha mostrada en el recuadro grisado intitulado "**Versor**", calcular:
a) $\hat{x} \times \hat{x}$, $\hat{x} \times \hat{y}$, $\hat{x} \times \hat{z}$
b) $\hat{y} \times \hat{x}$, $\hat{y} \times \hat{y}$, $\hat{y} \times \hat{z}$
c) $\hat{z} \times \hat{x}$, $\hat{z} \times \hat{y}$, $\hat{z} \times \hat{z}$

17- Usando la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma y los resultados del ejercicio anterior, demostrar que si:
$\mathbf{A} = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$
$\mathbf{B} = B_x\,\hat{x} + B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z}$
entonces:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y;\ A_z B_x - A_x B_z;\ A_x B_y - A_y B_x)$$

18- Observar que se obtiene un resultado idéntico al anterior si se usa el *determinante del producto vectorial:*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} =$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\,\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\,\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\hat{z}$$

19- Sean los vectores:
A = (3; 2; 1) **B** = (1; 0; –1) **C** = (0; –2; 4);
calcular cuando corresponda.
a) **B** x **C**
b) –4(**B** x **B**) – **A**
c) (**A** + **B**) x **C**

Producto Mixto

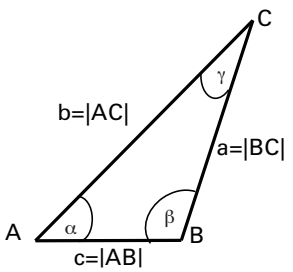
20- Sean los vectores **A** = (0, 0, 3), **B** = (8, 0, 0), **C** = (0, –2, 0), calcular, en coordenadas cartesianas, los siguientes productos mixtos. Indicar si la respuesta es un escalar o un vector. Graficar en los casos que corresponda.
a) **D** = (**B** x **C**) • (**A** x **C**)
b) **D** = –4(**B** x **B**) • **A** – **A**
c) **D** = (**A** x **C**) • **B**
d) **D** = (**A** x **C**) • (**C** x **A**)
e) **D** = (**A** x **B**) • (**A** – **B**)

Teoremas del coseno y del seno

21- (Opcional) Haciendo uso de la propiedad distributiva del producto escalar y vectorial respecto de la suma, demostrar el *teorema del coseno y del seno* y especializar cuando uno de los ángulos es recto (*teorema de Pitágoras)*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b\,.c\,.\cos\alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$



Identidades

Cualesquiera que sean los vectores **A**, **B** o **C**:

A x **B** = – **B** x **A**
(anticonmutatividad)

A • (**A** x **B**) = 0
(ortogonalidad)

Si **A** ≠ 0 y **B** ≠ 0 y **A** x **B** = 0 ⇒ **A** // **B**
(paralelismo)

(**A** + **B**) x **C** = **A** x **C** + **B** x **C**
(distributiva)

A x (**B** x **C**) = **B** (**A** • **C**) – **C** (**A** • **B**)

A x (**B** x **C**) + **C** x (**A** x **B**) + **B** x (**C** x **A**) = 0
(identidad de Jacobi)

Respuestas

1- |**A**| = 5; |**B**| = 2; |**C**| = 3,6; |**D**| = 5.

2- **A** = (1,73; 1); **B** = (–1,5; –2,6); **C** = (0; –1,5).

3- a) **C** = (–5; 7) |**C**| = 8,6 θ = 125,54°
b) **C** = (2; –3,464) |**C**| = 4 θ = –60°
c) **C** = (0; 0) |**C**| = 0 θ = 0°

4- Gráficos de elaboración personal.

5- b) **A** = (–1; –1,732) y **B** = (–2,121; 2,121);
C = **A** + **B** = (–3,121; 0,389) = **Resultante** = $\mathbf{R}_c$.
c) **A** + **B** = (–7; 7);
|**A**| = 2 √2 ; |**B**| = 5 √2; |**A** + **B**| = 7 √2 .

6- a) F; b) V; c) F; d) V; e) F.

7- a) son paralelos y de igual sentido;
b) |**B**| = 0 ; c) son perpendiculares.

8- b) **D** = (–6; 2; –6)

9- b) **Equilibrante** = $\mathbf{E}_c$ tal que $\mathbf{E}_c + \mathbf{R}_c = 0$; $\mathbf{E}_c = -\mathbf{R}_c$
$\mathbf{E}_c$ = (3,121; –0,389).

10- a) $\mathbf{D}_I$ = (1; 3); $\mathbf{D}_{II}$ = (15; 3).

11- a) **A** = $-4\,\hat{x} + 3\,\hat{y} + 0\,\hat{z}$; b) **B** = $2\,\hat{x}$;
c) **C** = $-2\,\hat{x} - 3\,\hat{y}$; d) **D** = $-5\,\hat{y}$.

12- a) $\mathbf{R}_a = 1\hat{x} - 7\,\hat{y} - 7\,\hat{z}$;
c) $\mathbf{R}_c = -19\,\hat{x} + 21\,\hat{y} - 12\,\hat{z}$.

13- $\hat{x} \bullet \hat{x} = \hat{y} \bullet \hat{y} = \hat{z} \bullet \hat{z} = 1$
$\hat{x} \bullet \hat{y} = \hat{y} \bullet \hat{x} = \hat{x} \bullet \hat{z} = \hat{z} \bullet \hat{x} = \hat{y} \bullet \hat{z} = \hat{z} \bullet \hat{y} = 0$

14- De elaboración personal.

15- a) **A** • **B** = – 3 + 0 + 3 = 0 ⇒ son perpendiculares
b) **A** • **B** = – 5 ; c) **A** • **B** = 3.

16- $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$;
$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$; $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$; $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$
$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$; $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$; $\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$

17- De elaboración personal.

18- De elaboración personal.

19- a) $-2\,\hat{x} - 4\,\hat{y} - 2\,\hat{z}$;
b) – **A** = $-3\,\hat{x} - 2\,\hat{y} - \hat{z}$
c) $8\,\hat{x} - 16\,\hat{y} - 8\,\hat{z}$

20- a) D = 0 b) **D** = – **A**
c) D = 48 d) D = –36 e) D = 0

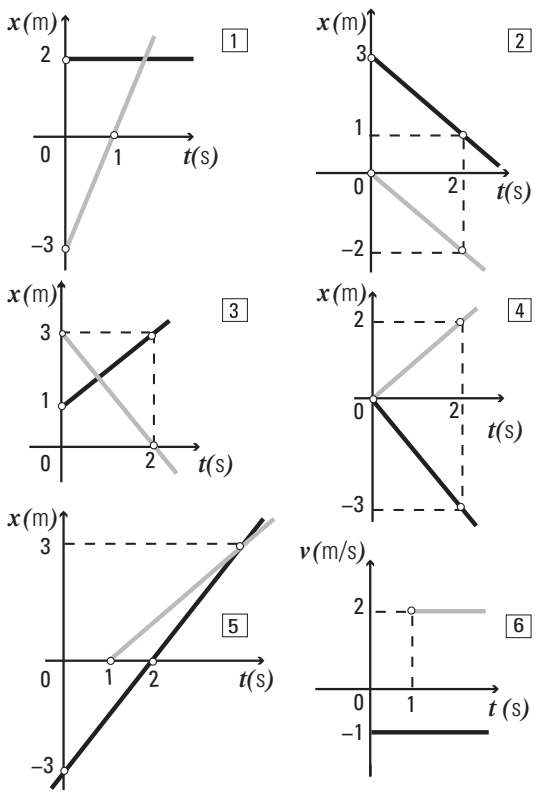
21- De elaboración personal.

Unidad 2
Cinemática

1_Cinemática en una dimensión

Movimiento rectilíneo y uniforme

1- En cada uno de los gráficos se encuentra representado el movimiento de dos móviles en colores negro y gris.



Para los cinco primeros escribir las ecuaciones horarias, dar en cada caso las condiciones iniciales, y si corresponde, determinar cuándo se produce el encuentro.

En el sexto gráfico decir si se pueden escribir las ecuaciones de posición en función del tiempo para ambos móviles, ¿se necesita algún dato adicional?, ¿se puede saber dónde se encuentran?

2- Un cuerpo que en el instante $t = 0$ se encuentra en un punto A, viaja en línea recta con velocidad constante de módulo desconocido v.

Cuando transcurre un tiempo T el móvil pasa por un punto B que está a una distancia d de A.

a) Hallar $v = v\,(d, T)$

b) Dar dos expresiones para la posición del cuerpo en función del tiempo, una considerando un sistema de coordenadas con origen en A y otra considerando un sistema de coordenadas con origen en B, y graficarlas.

3- Un automóvil viaja en línea recta con velocidad constante desde A hasta C, pasando por B. Se sabe que por A pasa a las 12 h, por B a las 13 h y por C a las 15 h.

(AB = 50 km, BC = desconocido).

a) Elegir un origen de tiempo y un sistema de referencia.

b) Elegir un instante t_0 ¿cuánto vale x_0? Escribir la ecuación de movimiento.

c) Elegir otro instante t_0 ¿cuánto vale x_0? Escribir la ecuación de movimiento.

d) Demuestre, algebraicamente, que las ecuaciones halladas en b) y c) son equivalentes.

4- Un móvil 1 viaja en línea recta desde A hacia B (distancia AB = 300 km) a una velocidad constante $\vec{v}_1$, tardando 225 minutos en realizar el trayecto. Otro móvil lo hace de B hacia A a una velocidad $\vec{v}_2$, y tarda 360 minutos. El móvil 2 parte 1 hora antes que el móvil 1.

a) Elegir un origen de tiempo y un sistema de referencia.

b) Escribir los vectores velocidad $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de los móviles 1 y 2, respectivamente.

c) En un mismo gráfico representar posición vs. tiempo para ambos móviles. Interpretar el significado del punto de intersección de ambas curvas. ¿Qué distancia recorrió cada móvil hasta el encuentro?

5- Repetir el problema anterior para el caso en que ambos móviles parten desde A hacia B.

6- Un ciclista que viaja en una trayectoria rectilínea recorre la mitad de su camino a 30 km/h, y la otra mitad a 20 km/h.

Despreciando el tiempo empleado en variar la velocidad:

a) Estimar entre qué valores estará el de la velocidad media con que hizo el viaje.

b) Trazar los gráficos cualitativos de posición y velocidad en función del tiempo.

c) Calcular el valor de dicha velocidad media.

ADVERTENCIA: $v_m \neq (v_1+v_2)/2$.

7- Una cuadrilla de empleados del ferrocarril viaja en una zorra por una vía rectilínea. En un instante dado, por la misma vía y a 180 m por detrás, ven venir un tren que viaja con una velocidad constante de 36 km/h.

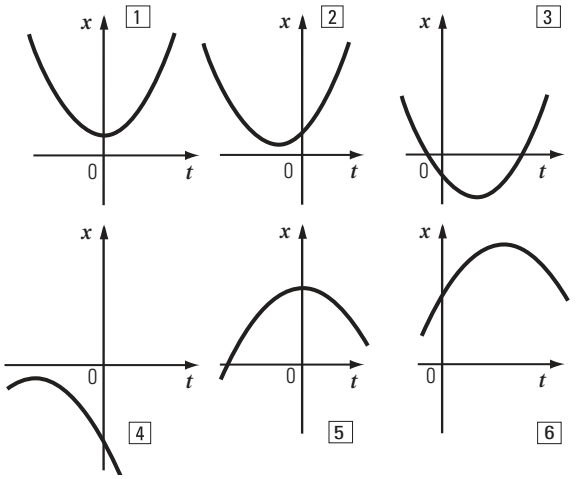
a) ¿A qué velocidad mínima y constante deberá moverse la zorra para poder llegar a un desvío, que en ese instante está 120 m más adelante, para evitar el choque?

b) Graficar velocidad y posición en función del tiempo, para ambos móviles.

c) Resolver ahora, considerando que se requieren 10 segundos para accionar el cambio de vía.

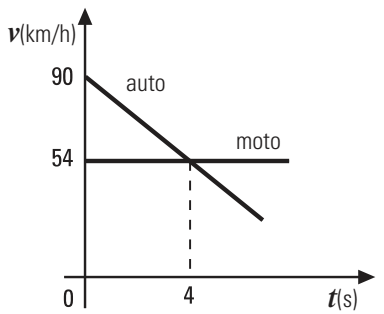
Movimiento rectilíneo uniformemente variado

8- a) Sin usar valores numéricos, en los siguientes gráficos de posición (x) en función del tiempo (t), determinar los signos de la posición, la aceleración (a) y la velocidad (v) en $t = 0$ s. Para cada caso graficar la velocidad y la aceleración en función del tiempo.



b) Suponer para los gráficos superiores $|x(t = 0)| = 1$ m y $|v(t = 0| = 2$ m/s, a menos que sea nula. Para los gráficos inferiores suponer $|x(t = 0)| = 3$ m y $|v(t = 0)| = 4$ m/s, a menos que sea nula. Escribir explícitamente las ecuaciones de posición suponiendo para todos los casos que $|a| = 6$ m/s^2.

9- Un automovilista se da cuenta al sobrepasar un motociclista que se trata de un amigo e instantáneamente (se desprecia el tiempo de reacción) aplica los frenos. Toda la información está contenida en el gráfico v vs. t, en el que se ha prendido el cronómetro en el instante en el que el auto sobrepasa la moto.



a) Cuatro segundos después de que el coche pasa la moto, ¿quién va adelante?, ¿o van juntos? Justifique la respuesta.

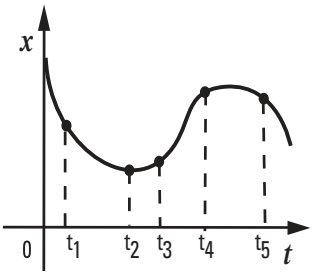
b) ¿Cuándo y dónde vuelven a encontrarse?

c) ¿Cuál es la velocidad del auto en ese momento?

d) Grafique x vs. t para ambos móviles.

e) ¿Podría hallar las soluciones a partir del gráfico v vs. t?

10- La figura muestra un gráfico de posición, x, en función del tiempo, t, para un móvil con movimiento rectilíneo.



¿Cuáles son los signos de v y a en los instantes: a) t_1; b) t_2 ;c) t_3; d) t_4 ; e) t_5 ?

Indique si el móvil está disminuyendo o aumentando el módulo de su velocidad en un instante posterior a los tiempos indicados en la figura.

11- Un auto viaja por una ruta a 20 m/s cuando observa un obstáculo delante de él a 50 m.

a) ¿Cómo deben ser los sentidos de los vectores aceleración y velocidad para que el auto frene?

b) ¿Cuál es la desaceleración mínima que debe imprimirse al automóvil para no chocar con el obstáculo?

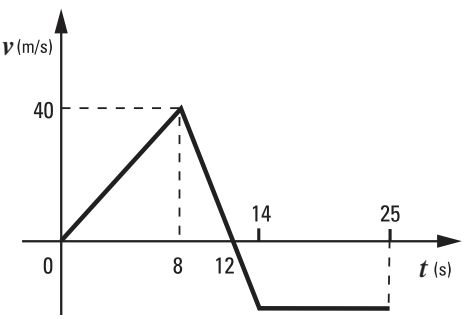
c) Idem que (b) teniendo en cuenta que el tiempo de respuesta del chofer es 0,3 segundos.

d) Muestre la situación calculada en (b) y (c) en un gráfico posición vs. tiempo.

12- El conductor de un tren subterráneo de 40 m de longitud, y que marcha a 15 m/s, debe aplicar los frenos 50 m antes de entrar en una estación cuyo andén mide 100 m de longitud.

Calcular entre qué valores debe hallarse el de la aceleración de frenado, para que el tren se detenga dentro de los límites del andén.

13- Analizar el gráfico dado, que corresponde a un movimiento rectilíneo en varias etapas.



Suponiendo que $x = 0$ m en $t = 0$ s, se pide:

a) Trazar los gráficos de aceleración y de posición en función del tiempo, determinando los valores correspondientes a los tiempos indicados.

b) Calcular la velocidad media del móvil, entre 0 y 25 segundos.

c) Escribir las ecuaciones horarias del móvil entre 0 y 25 segundos.

14- Un automóvil cuya velocidad es 90 km/h pasa ante un puesto caminero. En ese instante sale en su persecución un patrullero que parte del reposo y acelera uniformemente durante todo el recorrido. Sabiendo que el patrullero alcanza una velocidad de 90 km/h en 10 seg. Hallar:

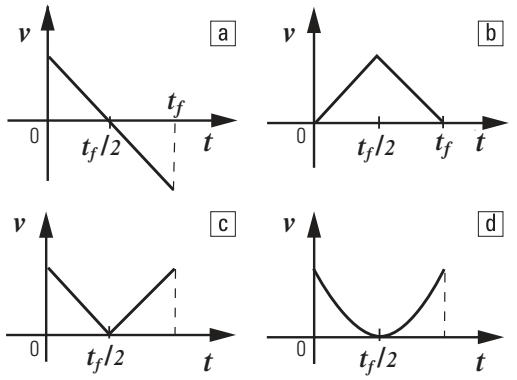
a) El tiempo que dura la persecución.

b) La posición en que el patrullero alcanza el automóvil.

c) La velocidad del patrullero en dicho punto.

d) Graficar, para ambos móviles, la velocidad en función del tiempo y relacione dicho gráfico con las respuestas a las preguntas a), b) y c).

15- Indicar cuál de los siguientes gráficos puede representar la velocidad en función del tiempo de un cuerpo que en el instante 0 se arroja verticalmente hacia arriba y regresa al punto de partida. Se desprecia el rozamiento del aire.



16. Desde una terraza a 40 m del suelo se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con velocidad de 15 m/s.

Despreciando el rozamiento con el aire:

a) Calcular los vectores posición, velocidad y aceleración en el instante $t = 3$ s.

b) ¿Cuándo llega al suelo?.

c) ¿Cuándo y dónde se encuentra con una piedra arrojada desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 55 m/s y que parte desde el suelo en el mismo instante que la anterior?

d) Representar gráficamente (para ambas piedras) la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

17- Un cuerpo se deja caer desde un globo aerostático, ubicado a 1000 m de altura, que desciende verticalmente con velocidad constante de 12 m/s. Despreciando el rozamiento con el aire:

a) Elegir un sistema de referencia y escribir las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo.

b) Calcular la velocidad y la distancia recorrida por el cuerpo al cabo de 10 seg.

c) Graficar en un mismo esquema x vs. t y v vs. t para el globo y el cuerpo.

d) Resolver los incisos a), b) y c) considerando que el globo asciende con velocidad constante de 12 m/s.

18- Una piedra que parte del reposo en caída libre recorre 67 m en el último segundo de su movimiento antes de tocar el piso.

Despreciando el rozamiento con el aire, determinar:

a) La altura desde la cual cayó.

b) El tiempo que tarda en llegar al piso.

c) La velocidad de llegada.

d) Graficar en función del tiempo posición, velocidad y aceleración.

19- ¿Con qué velocidad debe pasar un objeto por un punto P, moviéndose verticalmente, para que alcance un punto situado a una altura h del mismo, a los 3 y a los 7 segundos después de haber pasado por P, respectivamente?

Despreciar el rozamiento con el aire.

20- Un globo con gas asciende verticalmente con velocidad constante de 10 m/s. Cuando se encuentra a 16 m del piso, un muchacho que está debajo le dispara una piedra con su gomera, la que parte verticalmente a 30 m/s desde una altura de 1 m.

Despreciando el rozamiento con el aire:

a) ¿A qué distancia del piso alcanzará la piedra al globo? ¿Cuánto tiempo después de partir?

b) ¿Cuál será la velocidad de la piedra (respecto a tierra) en ese instante? Interpretar.

c) Suponiendo que pase por el costado, ¿vuelven a encontrarse? ¿Cuándo y dónde? ¿Cuál es la velocidad de la piedra en ese momento?

d) Trazar los gráficos correspondientes.

21- Juan arroja verticalmente hacia arriba una piedra, con una velocidad de partida de 10 m/s, y simultáneamente Pedro, que se encuentra 40 m más arriba, arroja otra hacia abajo, también con velocidad de 10 m/s.

Despreciando el rozamiento con el aire:

a) ¿A qué altura y en qué instante se cruzan ambas piedras?

b) Trazar los gráficos correspondientes e interpretar.

22- Una cañita voladora, que parte del reposo a nivel del piso, es impulsada verticalmente hacia arriba con una aceleración que se supone constante, mientras dura el combustible. Este se agota a los 5 segundos de partir, cuando está a 100 m de altura. Desde ese instante se mueve libremente (se desprecia el rozamiento con el aire) hasta que regresa al punto de partida.

Determinar:

a) La máxima velocidad que alcanza al ascender.

b) A qué altura (máxima) del piso llegará.

c) Trazar los gráficos de aceleración, velocidad y posición de la cañita en función del tiempo desde que parte hasta que vuelve al piso.

23- Las ecuaciones de movimiento para dos partículas A y B que se mueven en la misma dirección son las siguientes:

$x_A(t) = 3{,}2\ t^2 - 6t - 20$

$x_B(t) = 29 + 8{,}5\ t - 4{,}1\ t^2$,

Las constantes en las ecuaciones $x(t)$ tienen las unidades correspondientes para que x se exprese en metros, cuando t se expresa en segundos.

a) Calcular el instante t ($t \geq 0$ s) y la posición en el cual las partículas se encuentran.

b) Calcular las velocidades de A y B en el instante de encuentro.

c) Graficar aceleración, velocidad y posición en función del tiempo.

Movimientos con aceleración dependiente del tiempo

Las constantes en las ecuaciones horarias tienen las unidades correspondientes para que x se exprese en metros y v en metros por segundo, cuando t se expresa en segundos.

Para cada ejercicio a continuación (del 24 al 29): establecer cuáles son los intervalos en los que el movimiento es acelerado y cuáles en los que es desacelerado. Determinar, si corresponde, cual/les es/son los instantes en el/los cual/les la rapidez es máxima.

24- El movimiento rectilíneo de una partícula está definido por la ecuación:

$x(t) = 2\ t^3 - 6\ t^2 + 28\ t - 10$,

donde x se expresa en metros y t en segundos.

Calcular la posición, la velocidad y la aceleración cuando t =10 s.

25- La velocidad de una partícula que realiza un movimiento rectilíneo, para $t \geq 0$ s, viene dado por la ecuación: $v(t) = 3\ t^2 - 20\ t - 20$, donde v se expresa en metros por segundo y t en segundos. Sabiendo que para t=0 s el móvil se encuentra en $x(t=0) = -16$m.

a) Calcular la velocidad media y aceleración media de la partícula en el intervalo comprendido entre t = 0 s y t = 12 s.

b) Trazar las gráficas $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

26- La posición de una partícula, para $t \geq 0$ s, está dada por la ecuación:

$x(t) = t^3 - 6\ t^2 - 20\ t - 50$,

donde x se expresa en metros y t en segundos.

a) Calcular el instante en el cual su velocidad se anula.

b) Calcular la aceleración en dicho instante. Calcular la aceleración media en el intervalo comprendido entre t = 0 s y $t = t$ (v = 0 m/s).

c) Trazar las gráficas $x(t)$; $v(t)$; y $a(t)$.

27- Una partícula se desplaza siguiendo una trayectoria rectilínea. Para cada una de las siguientes expresiones de la aceleración $a(t)$ de la partícula, encontrar la expresión más general para la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$.

a) $a(t) = a_0$, donde a_0 es una constante.

b) $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$, donde a_0 y ω son constantes.

c) $a(t) = A\ t^2$, donde A es una constante.

28- Una partícula se mueve linealmente siguiendo la ecuación:

$x(t) = x_0$ sen ($\omega\ t$); siendo x_0 y ω constantes y donde x se mide en metros y t en segundos.

Encuentre la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

29- La aceleración de una motocicleta que viaja en línea recta es $a = A\ t - B\ t^2$, con A = 1,2 m/s^3 y B = 0,120 m/s^4. La moto está en el origen de coordenadas en t = 0 s, en reposo.

a) Obtener la posición y la velocidad en función del tiempo.

b) Graficar la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

c) Calcular la velocidad máxima que alcanza en el intervalo $0 \leq t \leq 15$ s.

2_Cinemática en dos dimensiones

1- Un insecto pasa caminando por el punto K ($\vec{r}_K$= 2 cm $\hat{x}$ + 8 cm $\hat{y}$), con una velocidad $\vec{v}_K$= − 8 cm/s $\hat{x}$ − 7 cm/s $\hat{y}$. Tres segundos más tarde pasa por el punto L ($\vec{r}_L$= 11 cm $\hat{x}$ − 4 cm $\hat{y}$) con velocidad $\vec{v}_L$=−13 cm/s $\hat{x}$ + 5 cm/s $\hat{y}$.

a) En un esquema, trazar los vectores posición y velocidad del insecto para ambos instantes.

b) Determinar los vectores desplazamiento, velocidad media y aceleración media del insecto, entre ambos instantes.

c) Dibujar una posible trayectoria.

2- Una pista de atletismo consiste en dos tramos rectos paralelos, de 80 m de longitud cada uno, y dos tramos en forma de semicircunferencia, que los conectan por sus extremos para cerrar el circuito. Los tramos rectos están distanciados entre sí 40 m, de modo que los tramos curvos tienen 20 m de radio.

Un corredor la recorre con una velocidad de módulo constante e igual a 18 km/h.

a) Hacer un esquema de la pista; representar los vectores velocidad instantánea del corredor:

- en los puntos medios de los tramos rectos (Puntos A y C)
- en los puntos medios de los tramos curvos (Puntos B y D)

b) Hallar cuánto tiempo tardará en recorrer el circuito completo, y cuánto para ir de A hasta B, y de A hasta C.

c) Determinar el vector aceleración media del corredor entre los puntos A y C, y entre C y D.

d) Indicar la dirección y el sentido del vector aceleración instantánea en cada uno de los puntos indicados.

e) Hallar el vector velocidad media en un recorrido completo entre A y A, y la velocidad escalar media entre esos puntos.

Tiro oblicuo

3- Un arquero dispara desde el piso una flecha cuya velocidad de salida es de 50 m/s y forma un ángulo de 37° con la horizontal.

Considerando despreciable el rozamiento con el aire, y utilizando un sistema de coordenadas con el versor $\hat{x}$ hacia el lado del lanzamiento y el versor $\hat{y}$ hacia arriba, calcular:

a) El tiempo que la flecha está en el aire.
b) La altura máxima.
c) El alcance.
d) El vector velocidad a los 5 segundos.
e) El vector velocidad final.
f) Los vectores desplazamiento, velocidad media y aceleración media en los intervalos comprendidos entre los instantes $t = 0$ s y $t = t_{hmax}$; y entre $t = 0$ s y $t = t_{alcance}$.

4- Un gato maúlla con ganas, instalado sobre un muro de 2 m de altura. Juan está en su jardín, frente a él y a 18 m del muro, y pretende ahuyentarlo arrojándole un zapato.

El proyectil parte con una velocidad de 15 m/s, formando 53° con la horizontal, desde una altura de 1,25 m.

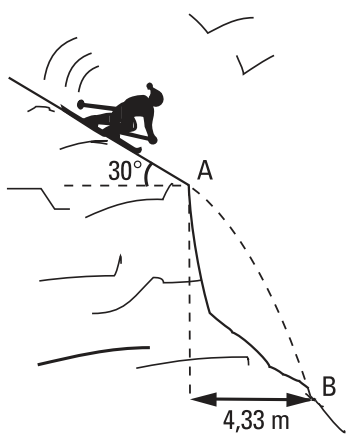
a) Hallar a qué distancia por encima de donde estaba el gato pasó el zapato.
b) Determinar a qué distancia al otro lado del muro llegó el zapato al piso.

5- Susana arroja horizontalmente su llavero desde la ventana de su departamento, y Andrés lo recibe a 1,2 m de altura sobre el piso, 0,8 segundos después. Sabiendo que Andrés se encuentra a 4,8 m del frente de la casa de Susana, hallar:

a) A qué altura del piso partió el llavero.
b) Con qué velocidad llegó a las manos de Andrés.
c) Escribir la ecuación de la trayectoria.

6- Un esquiador que se desliza por una rampa inclinada 30° llega al borde A con cierta velocidad. Luego de un segundo de vuelo libre, retoma la pista en B, 4,33 m más adelante del punto A.

Hallar la velocidad que tiene en el punto A, y el desnivel existente entre A y B. ¿Qué velocidad tendrá en B?



7- Una pelota es lanzada desde el piso con una velocidad cuyo módulo es $|\vec{v}_0|$, formando un ángulo α con la horizontal.

Despreciando el rozamiento con el aire:

a) Elegir un sistema de referencia y obtener las expresiones de los vectores posición, velocidad y aceleración en función del tiempo si $|\vec{v}_0| = 5$ m/s y para los casos donde $\alpha = n \cdot \pi/6$ (n =1, 2, 3).

b) Hacer los gráficos de posición y velocidad en función del tiempo para los 3 valores de n.

c) Calcular la altura máxima (y_{max}) y el alcance (A) para cada valor de n y graficar y_{max} vs n y A vs n. Interpretar.

d) Calcule el vector velocidad y aceleración en los puntos de altura máxima (y_{max}) y alcance (A).

e) A partir de las expresiones generales de y_{max} y A, encuentre la relación de ambos para cada valor de α.

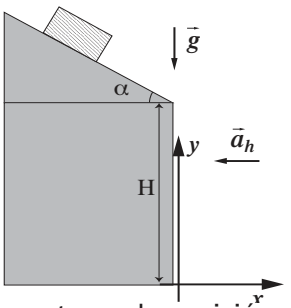
8- Un cuerpo baja deslizando por un plano inclinado que forma un ángulo $\alpha = 30°$ con la horizontal. Al llegar al final del mismo, el cuerpo alcanza una velocidad de módulo 10 m/s.

A partir de ese momento, el cuerpo cae, pero debido a la presencia de viento, adquiere también una aceleración horizontal $\vec{a}_h$. (Ver figura).

H = 200 m;

$|\vec{g}| = 10$ m/s^2;

$|\vec{a}_h| = 0{,}5$ m/s^2.



a) Calcular el alcance.
b) Calcular la velocidad al llegar al piso.

9- Una botella que se encuentra en la posición $x = 20$ m e $y = 30$ m se deja caer desde el reposo. Al mismo tiempo, se lanza desde el origen de coordenadas una piedra con una velocidad de módulo 15 m/s.

a) Determinar el ángulo con el que debe lanzarse la piedra para que rompa la botella.

b) Si el ángulo es el hallado en a), calcular la altura a la que se produce el impacto.

c) Dibujar en un mismo gráfico la trayectoria de la piedra y la de la botella.

10- Las coordenadas de un ave que vuela en el plano xy son: $x = 2{,}0$ m $- 3{,}6$ m/s. t
$y = 1{,}8$ m/s^2. t^2

a) Dibujar la trayectoria del ave.

b) Calcular los vectores velocidad y aceleración en función del tiempo.

c) Dibujar los vectores velocidad y aceleración para $t = 3$ s.

En un instante inmediatamente posterior a $t = 3$ s, ¿el ave está acelerando, frenando o su rapidez no está cambiando?

d) Calcule los vectores desplazamiento, velocidad media y aceleración media en el intervalo comprendido entre los instantes $t = 0$ s y $t = 3$ s.

Movimiento circular

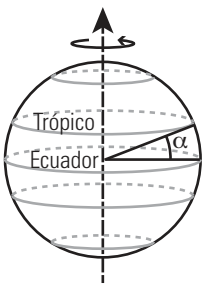
11- Un CD, de radio de 6 cm, gira a 2500 rpm.
a) Calcular el módulo de la velocidad angular en radianes por segundo.
b) Calcular el módulo de la velocidad tangencial de un punto sobre su borde.
c) Calcular la frecuencia en Hz.

12- Una varilla metálica de 30 cm de longitud gira respecto a uno de sus extremos a 60 rpm.
Calcular:
a) El período y el número de vueltas en 30 s.
b) El módulo de la velocidad de un punto de la varilla situado a 10, 20 y 30 cm del extremo fijo.

13- Un piloto de avión bien entrenado soporta aceleraciones de hasta 8 veces la de la gravedad, durante tiempos breves, sin perder el conocimiento. Si un avión vuela a 2300 km/h, ¿cuál será el radio de giro mínimo que puede soportar?

14- Si el período de un movimiento circular uniforme (MCU) se triplica, manteniendo el radio constante, ¿cómo cambian su:
a) velocidad angular?
b) frecuencia?
c) aceleración normal o centrípeta?

15- a) Calcular el módulo de la velocidad de un punto situado sobre el ecuador en la Tierra.
b) Calcular el módulo de la velocidad de un punto ubicado en los trópicos, sabiendo que el ángulo que forman con el ecuador terrestre es $\alpha = 23° 27'$ (latitud).
c) ¿Cuál es la velocidad de un punto ubicado en los polos?
$R_{Tierra} = 6378$ km



16- a) ¿Cuánto vale la aceleración centrípeta de un objeto ubicado sobre el ecuador terrestre como consecuencia de la rotación de la Tierra sobre sí misma?
b) ¿Cuánto debería valer el período de rotación de la Tierra para que el módulo de la aceleración centrípeta en su superficie en el ecuador fuera igual a 9,8 m/s^2?

17- Una patinadora sobre hielo de 65 kgf de peso se mueve sobre una pista horizontal a 18 km/h. En cierto instante toma el extremo de una varilla , paralela a la pista y perpendicular a su trayectoria, cuyo extremo está enganchado a un poste vertical, de modo tal que su movimiento posterior es una circunsferencia de radio igual a 1 m. Determinar inmediatamente que toma la barra:
a) El módulo de la velocidad angular.
b) El módulo de la aceleración centrípeta.
c) ¿Cómo cambian los resultados a) y b) si la patinadora pesa 50 kgf?

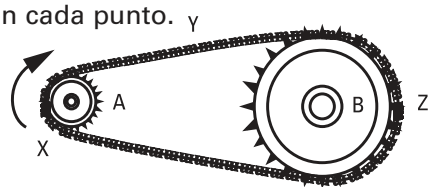
18- Teniendo en cuenta que la Tierra gira alrededor del Sol en 365,25 días y que el radio de giro medio es de 1,5 x 10^{11} m, calcular (suponiendo que la Tierra gira realizando un movimiento circular uniforme):
a) El módulo de la velocidad angular en rad/día.
b) El módulo de la velocidad tangencial.
c) El ángulo que recorrerá en 30 días.
d) El módulo de la aceleración centrípeta.

19- Calcular cuánto tiempo transcurre entre dos momentos en los cuales el Sol, Marte y Júpiter están alineados, de este modo, (suponiendo que ambos planetas se mueven con un movimiento circular uniforme). El período de la órbita alrededor del Sol de Marte es de 687 días terrestres y el de Júpiter es de 11,86 años terrestres.

20- La Estación Espacial Internacional gira con velocidad angular constante alrededor de la Tierra cada 90 minutos en una órbita a 300 km de altura sobre la superficie terrestre (por tanto, el radio de la órbita es de 6670 km).
a) Calcular el módulo de la velocidad angular.
b) Calcular el módulo de la velocidad tangencial.
c) ¿Tiene aceleración? En caso afirmativo, indicar sus características y, en caso negativo indicar la razón por la cual no existe.

21- Un disco gira, con movimiento uniforme, 13,2 radianes cada 6 segundos. Ubicar el centro del disco en el origen de coordenadas.
a) Calcular el módulo de la velocidad angular.
b) Calcular el período y la frecuencia de rotación.
c) ¿Cuánto tiempo tardará el disco en girar un ángulo de 780º?
d) ¿Y en efectuar 12 revoluciones?
e) Si la trayectoria está descripta en el plano (x, y), el giro es horario y el radio 1 m, expresar usando versores los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ cuando un punto del borde intercepta los ejes coordenados. (Utilizar un sistema de coordenadas con el $\hat{x}$ hacia la derecha y el $\hat{y}$ hacia arriba)

22- Dos ruedas dentadas, cuyos ejes A y B se encuentran a una distancia fija, se vinculan mediante una cadena para formar un mecanismo de transmisión similar al que puede observarse en una bicicleta. Sus radios son $r_A = 3$ cm, y $r_B = 9$ cm, respectivamente. Se hace girar a la rueda A con velocidad angular constante en el sentido indicado, a 100 rpm.
Considerando el pasaje de un eslabón sucesivamente por los puntos X, Y, Z, determinar:
a) El módulo de su velocidad, en cada punto.
b) La frecuencia con que gira la rueda B.
c) El módulo de la aceleración que experimenta el eslabón en cada punto.



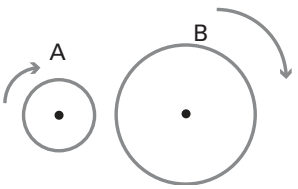
23- Un cuerpo inicialmente en reposo, tal que θ (t = 0) = 0 y ω (t = 0) = 0, es acelerado en una trayectoria circular de 1,3 m de radio, de acuerdo a la ley $\gamma = 120\ s^{-4}\ t^2 - 48\ s^{-3}\ t + 16\ s^{-2}$ donde gamma (γ) es la aceleración angular medida en seg^{-2}; theta (θ) se mide en radianes y la velocidad angular omega (ω) en seg^{-1}. Hallar:

a) $\theta = \theta\ (t)$

b) $\omega = \omega\ (t)$

c) Expresar los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en t = 0,3 s.

24- Dos ruedas A y B, de radios R_A= 20 cm y R_B= 40 cm giran en sentido horario. La frecuencia de rotación de la rueda A es de 120 rpm y la de la rueda B es de 240 rpm. En cierto instante se le aplica un freno a cada rueda de forma tal que A se detiene en 16 s y B en 8 s, ambas con aceleración angular constante.

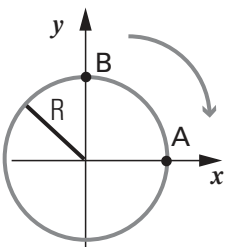


a) Para cada rueda expresar la aceleración angular, la velocidad angular y el ángulo en función del tiempo.

b) ¿En qué instante tienen ambas ruedas la misma velocidad angular? ¿En qué instante los puntos de la periferia tienen velocidades de igual módulo?

c) Calcular el ángulo barrido por cada rueda entre el instante en el cual se aplican los frenos y cada uno de los instantes del item b).

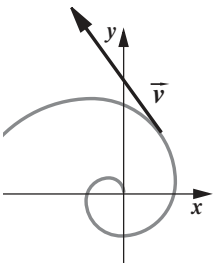
25- En una autopista circular de 7,5 m de radio dos competidores prueban sus motocicletas. Ambos giran en sentido horario. Uno de ellos, Gino, prueba su moto ejecutando un movimiento circular uniforme de frecuencia igual a 30 rpm. El otro, Miguel, realizando un movimiento uniformemente acelerado, cuya velocidad angular aumenta en forma constante a razón de π 1/s cada segundo. Miguel pasa por B con una velocidad angular de π 1/s en el mismo instante en el que Gino pasa por A.



a) Escribir las ecuaciones horarias $\theta(t)$ para cada una de las motos (especifique claramente cómo mide el ángulo θ). Hallar el instante y la posición en la cual ambos vehículos se encuentran por primera vez .

b) Calcule los vectores velocidad y aceleración de cada moto en el instante de encuentro. Represéntelos en un esquema.

26- Suponer que un objeto sigue una trayectoria en espiral, como se muestra en la figura, mientras viaja con una velocidad de módulo constante.



¿Es constante la velocidad del objeto?

¿Es constante su aceleración? Si el módulo de la aceleración no es constante, ¿aumenta o disminuye?

3_Movimiento relativo

1- Un catamarán, en el Tigre, se mueve a velocidad constante respecto de la orilla. Un empleado de la embarcación, en su tiempo de descanso, lanza una moneda en dirección vertical hacia arriba desde su mano. Un pescador desde la orilla se entretiene observando el movimiento de la moneda. Despreciando el rozamiento con el aire, cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

a) Para el pescador, la aceleración que tiene la moneda es la misma que la que observa el empleado.

b) Para el empleado, la moneda se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, al igual que el catamarán.

c) Para el pescador, hay en un instante en el cual la moneda tiene velocidad nula.

d) La altura máxima que alcanza la moneda, medida desde el nivel del agua, es mayor para el empleado, que para el pescador.

e) Para el empleado la velocidad vertical, instante a instante, es menor que la que observa el pescador.

f) Para el pescador, la velocidad de la moneda en la dirección horizontal es en sentido opuesto a la velocidad del catamarán.

g) Para el empleado, la moneda regresa a sus manos con una velocidad cuyo módulo es menor que la que tendría si el catamarán estuviese quieto.

h) Para el empleado, la moneda regresa a sus manos con la misma velocidad con que fue arrojada pero en sentido contrario.

i) El tiempo de vuelo (desde que arroja la moneda hasta que justo llega a sus manos) es mayor cuanto mayor sea la velocidad del catamarán.

j) La moneda regresa a las manos del empleado en el mismo tiempo en el que llegaría si el catamarán estuviese quieto.

k) Respecto del catamarán, el desplazamiento de la moneda desde que la arroja hasta que llega a las manos del joven es nulo.

2- Un avión que vuela en dirección horizontal a 300 m/s y a 800 metros de altura, deja caer un paquete. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular, respecto del suelo y respecto del avión, el punto dónde caerá el paquete y a qué velocidad lo hará.

3- La casa de Juan se encuentra a 900 m (9 cuadras) de la casa de Diana. Caminando con velocidad constante, Juan tarda 10 minutos en cubrir esa distancia, mientras que Diana la recorre en 15 minutos.

Cierto día salen ambos a las 15 h, cada uno desde su casa y dirigiéndose a la casa del otro.

A partir de un sistema de referencia en el cual Diana está en reposo en el origen de coordenadas y cuyo sentido positivo apunta hacia la casa de Juan:

a) Determinar las velocidades relativas a dicho sistema de los personajes y sus respectivas casas.

b) Escribir las ecuaciones horarias correspondientes al movimiento de Juan en ese sistema. ¿Cuál será su posición en el mismo, al encontrarse con Diana?

c) Hallar el tiempo de encuentro, y la posición de ambas casas en ese instante, respecto de Diana.

d) Trazar los gráficos posición-tiempo y velocidad-tiempo correspondientes.

4- Dos carneros (uno blanco y otro negro) están en reposo, uno frente al otro, distanciados 24 m. En un instante dado, ambos parten para chocarse. Se supone que sus aceleraciones son constantes, y sus módulos 1,6 m/s² y 1,4 m/s², respectivamente.

A partir de un sistema de referencia en el cual el carnero blanco está en reposo y con sentido positivo apuntando hacia el carnero negro:

a) Escribir las ecuaciones horarias de ambos carneros.

b) Trazar los gráficos correspondientes.

5- El maquinista de un tren que avanza con una velocidad v_1 advierte delante de él, a una distancia d, la cola de un tren de carga que se mueve en su mismo sentido, con una velocidad v_2 constante, menor que la suya.

Frena entonces, con aceleración constante.

Determinar el mínimo valor del módulo de dicha aceleración, para evitar el choque.

SUGERENCIA: Adoptar un sistema de referencia fijo a uno de los trenes.

6- Entre los muelles A y B, que están en la misma orilla de un canal rectilíneo, hay una distancia de 400 m. Un bote de remos tarda 40 s en ir de A hasta B, y 50 s en regresar.

Considerando constantes los módulos de las velocidades del bote respecto del río ($|\vec{v}_{BR}|$) y de la corriente respecto a la orilla ($|\vec{v}_{RT}|$), hallar el valor de los mismos.

7- El muelle B se encuentra río abajo del muelle A sobre la misma orilla de un canal rectilíneo. Un bote se desplaza con una velocidad de 15 m/s respecto al agua. La velocidad de la corriente del arroyo es de 5 m/s. Sabiendo que, partiendo de A, tarda 3 minutos en su viaje de ida y vuelta a B (despreciando el tiempo que tarda en invertir el sentido), ¿cuál es la distancia entre muelles?

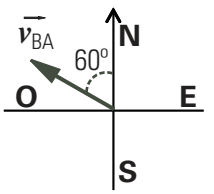
8- En un día de verano en que no hay viento se descarga un chaparrón, de modo tal que las gotas de agua siguen trayectorias verticales.

El conductor de un automóvil que marcha a 10 km/h ve que las gotas llegan en dirección perpendicular al parabrisas.

Sabiendo que el parabrisas forma un ángulo de 60° con la horizontal, hallar el módulo de las velocidades con que descienden las gotas de lluvia vistas desde tierra, y con la que golpean al parabrisas.

9- Un bote se mueve en dirección N 60° O, a 40 km/h con respecto al agua. La corriente es tal que el movimiento resultante con respecto a la orilla es hacia el Oeste a 50 km/h.

Calcular el módulo, la dirección y sentido de la velocidad de la corriente con respecto a Tierra.



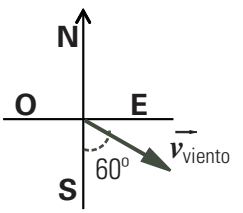
10- Un avión vuela desde un punto A hasta otro punto B que se encuentra 400 km de distancia en la dirección Este.

El viento sopla con velocidad de 100 km/h en dirección S 60° E.

Si el módulo de la velocidad de avión respecto al aire es de 300 km/h, calcular:

a) El ángulo con que el piloto debe orientar el avión.

b) Cuánto tarda el avión en llegar a B.

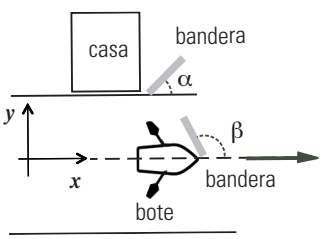


11- Una bandera, línea gris en el gráfico, situada en el mástil de un bote forma un ángulo de $\beta = 143°$ como se muestra en la figura. Otra bandera similar situada en una casa en la orilla del río, forma un ángulo de $\alpha = 53°$.

La velocidad del barco, respecto a tierra, es de 15 km/h paralelo a la orilla. Haga coincidir el versor $\hat{x}$ con la velocidad del barco, $\vec{v}_{BT}$ y al versor $\hat{y}$ perpendicular a la orilla, como muestra la figura. Calcular:

a) el módulo del vector velocidad del viento respecto de tierra.

b) el módulo del vector velocidad del viento respecto del bote.



12- Una lancha, que desarrolla una velocidad de 10 km/h en aguas quietas, tarda 10 minutos en cruzar un río de 1 km de ancho y llegar a un punto situado a 500 metros río arriba (o sea en sentido opuesto a la corriente) en la orilla de enfrente.

a) ¿Qué ángulo forma con la costa la dirección en la que está orientada la lancha?

b) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de la corriente?

c) Si las aguas estuvieran quietas y la lancha se orientara en la misma dirección que la calculada en el ítem anterior, calcular cuánto tiempo tardaría en cruzar a la otra orilla y cuánto sería el módulo de su desplazamiento paralelo a la orilla.

13- (opcional) Una llanta de radio R rueda sin resbalar con velocidad del centro de masa constante $\vec{v}_0$ a lo largo de un plano horizontal.

a) Verificar que la posición de un punto de su borde, inicialmente en 0, está dada por las ecuaciones:

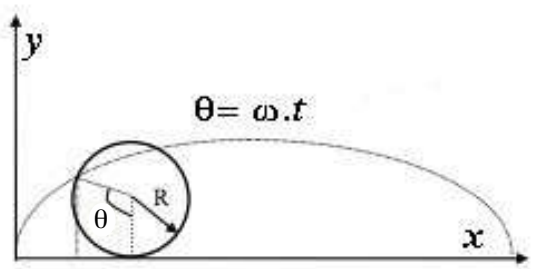
$x = R(\omega t - \text{sen}\ \omega t)$

$y = R(1 - \cos \omega t)$,

donde $\omega = |\vec{v}_0| / R$ es la velocidad angular de la llanta y t se mide desde el instante en que el punto está inicialmente en contacto con el plano.

b) Hallar las componentes de la velocidad y de la aceleración del punto.

c) Dibujar los vectores velocidad y aceleración en un dado instante.



14- (opcional)

a) Encuentre el radio de curvatura del punto más alto de la trayectoria de un proyectil disparado con un ángulo inicial α con respecto a la horizontal. (Sugerencia: En el punto máximo, la velocidad es horizontal y la aceleración vertical).

b) Evaluar para: $\alpha = 30°$ y $|\vec{v}_0| = 10$ m/s.

c) Con los datos del proyectil (b), calcule el radio de curvatura cuando está en la mitad de altura al subir y al bajar, interpretar.

Respuestas

Se ha adoptado el módulo de $\vec{g}$: $|\vec{g}| = 10$ m/s^2.

1_Cinemática en una dimensión

Movimiento rectilíneo y uniforme

1- 1) $x_N(t) = 2$ m $\quad x_G(t) = -3$ m $+ 3$ m/s t
($t_E = 5/3$ s)

2) $x_N(t) = 3$ m $- 1$ m/s $t \quad x_G(t) = -1$m/s t
(t_E = no existe)

3) $x_N(t) = 1$ m $+1$ m/s $t \quad x_G(t) = 3$ m $- 3/2$ m/s t
($t_E = 0{,}8$ s)

4) $x_N(t) = -1{,}5$ m/s $t \quad x_G(t) = 1$ m/s t
($t_E = 0$ s)

5) $x_N(t) = -3$ m $+ 3/2$ m/s $t \quad x_G(t) = 1$ m/s $(t - 1$ s)
($t_E = 4$ s)

2- a) $v = d/T$

b) Origen A $x(t) = (d/T)\ t$

Origen B $x(t) = -d + (d/T)\ t$

3- De elaboración personal.

4- De elaboración personal. ($t_E \approx 2{,}92$ hs).

5- De elaboración personal. ($t_E \approx 2{,}66$ hs).

6- a) y b) De elaboración personal.

c) $v_{media} = \langle v \rangle = 2\ .\ v_1 .v_2 / (v_1 + v_2) = 24$ km/h

7- a) $v_{min} = 4$ m/s

b) De elaboración personal.

c) $v_{min} = 6$ m/s

Movimiento rectilíneo uniformemente variado

8- a) De elaboración personal

b) $x_1(t) = 1$ m $+ 0$ m/s $t + 3$ m/s^2 t^2
$x_2(t) = 1$ m $+ 2$ m/s $t + 3$ m/s^2 t^2
$x_3(t) = -1$ m $- 2$ m/s $t + 3$ m/s^2 t^2
$x_4(t) = -3$ m $- 4$ m/s $t - 3$ m/s^2 t^2
$x_5(t) = 3$ m $+ 0$ m/s $t - 3$ m/s^2 t^2
$x_6(t) = 3$ m $+ 4$ m/s $t - 3$ m/s^2 t^2

9- a) El auto marcha adelante de la moto.

b) $t_E = 8$ s; $x_E = 120$ m.

c) $|v_A| = 5$ m/s

d) y e) De elaboración personal.

10- De elaboración personal

11- a) De elaboración personal

b) $|a_{min}| = 4$ m/s^2

c) $|a_{min}| = 4{,}54$ m/s^2

d) De elaboración personal.

12- 0,75 m/s$^2 \le |a| \le 1{,}25$ m/s^2

13- a) De elaboración personal.

b) $v_{media} = \langle v \rangle = 0$ m/s

c) $0 \le t \le 8$ s:
$a = 5$ m/s^2
$v(t) = 5$ m/s^2 t
$x(t) = 5/2$ m/s^2 t^2

$8 < t \le 14$ s:
$a = -10$ m/s^2
$v(t) = 40$m/s $- 10$ m/s^2 $(t - 8$ s$)$
$x(t) = 160$ m $+ 40$ m/s $(t - 8$ s$) - 5$ m/s^2 $(t - 8$ s$)^2$

$t > 14$ s:
$a = 0$
$v(t)) = -20$ m/s
$x(t) = 220$ m $- 20$ m/s $(t - 14$ s$)$

14- a) $t_E = 20$ s

b) $x_E = 500$ m

c) $|v_P| = 50$ m/s

d) De elaboración personal.

15- a)

16- Considerando $\hat{y}$ hacia arriba e $y = 0$ m en el suelo

a) $\vec{r}(t = 3$ s$) = 40$ m $(\hat{y})$;

$\vec{v}(t = 3$ s$) = 15$ m/s $(-\hat{y})$;

$\vec{a} = \vec{g} = 10$ m/s $(-\hat{y})$.

b) $t_{suelo} \approx 4{,}7$ s

c) $t_E = 1$ s ; $y_E = 50$ m.

d) De elaboración personal.

17- a) De elaboración personal.

b) $|v| = 112$ m/s ; $d = 620$ m.

c) De elaboración personal.

d) $|v| = 88$ m/s ;

$d = 380$ m$+ 2$ x $7{,}2$ m $= 394{,}4$ m.

18- a) **H** = 259,2 ; b) $t_{piso} = 7{,}2$ s; c) $|v| = 72$ m/s

19- $|v| = 50$ m/s

20- a) d = 26 m; $t = 1$ s ;

b) $|v_p| = 20$ m/s

c) $d = 46$ m; $t = 3$ s ; $|v_p| = 0$ m/s

d) De elaboración personal.

21- a) $t_E = 2$ s $\qquad y_E = 0$ m.

b) De elaboración personal.

22- a) $|v_{max}| = 40$ m/s

b) $|y_{max}| = 180$ m

c) De elaboración personal.

23- a) $t_E \approx 3{,}7678$ s $\qquad x_E \approx 2{,}82$m

b) $v_A(t = t_E) \approx 18{,}11$ m/s; $v_B(t = t_E) \approx -22{,}4$ m/s.

c) De elaboración personal.

Movimiento con aceleración dependiente del tiempo

24- $x(t = 10$ s$) = 1670$ m $\qquad v(t = 10$ s$) = 508$ m/s
$a(t = 10$ s$) = 108$ m/s^2

25- a) $v_{media} = 4$ m/s; $a_{media} = 16$ m/s^2.

b) De elaboración personal.

26- a) $t = 5{,}27$ s

b) $a\ (t = 5{,}27$ s$) = 19{,}62$ m/s^2; $a_m = 3{,}8$ m/s^2.

c) De elaboración personal.

27- a) $v(t) = v_0 + a_0\ (t - t_0)$;

$x(t) = x_0 + v_0\ (t - t_0) + \frac{1}{2}\ a_0\ (t - t_0)^2$

b) $v(t) = v_0 + a_0/\omega$ [sen $(\omega\ t)$ – sen $(\omega\ t_0)$];

$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) - a_0/\omega^2$ [cos $(\omega\ t)$ – cos$(\omega\ t_0)$]
$- a_0/\omega$ sen $(\omega\ t_0)\ (t - t_0)$

c) $v(t) = v_0 + A/3\ (t^3 - t_0^3)$;

$x(t) = x_0 + [v_0 - 1/3\ A\ t_0^3]\ (t - t_0) + 1/12\ A\ (t^4 - t_0^4)$

28- De elaboración personal.

29- $x(t_0 = 0$ s$) = 0$ m $\qquad v(t_0 = 0$ s$) = 0$ m/s

a) $x(t) = A\ t^3/6 - B\ t^4/12$;

$v(t) = A\ t^2/2 - B\ t^3/3$

b) De elaboración personal.

c) $v_{max} = A^3/(6\ B^2) = 20$ m/s

2_Cinemática en dos dimensiones

1- b) $\Delta\vec{r}$ = 9 cm $\hat{x}$ - 12 cm $\hat{y}$

$\vec{v}_{media}$ = 3 cm/s $\hat{x}$ – 4 cm/s $\hat{y}$

$\vec{a}_{media}$ = –1,66 cm/s^2 $\hat{x}$ + 4 cm/s^2 $\hat{y}$

c) La trayectoria debe pasar por los puntos K y L, y ser tangente a los respectivos vectores velocidad, teniendo en cuenta el sentido del movimiento.

2- b) Tiempo:
Para el circuito completo: = 57,12 s
Tramo AB: = 14,28 s
Tramo AC: = 28,56 s
c) Vector aceleración media :
Tramo AC: = – 0,35 m/s^2 $\hat{x}$
Tramo CD: = 0,35 m/s^2 $\hat{x}$ + 0,35 m/s^2 $\hat{y}$
($\hat{x}$ tiene la dirección y sentido del movimiento del corredor en A y $\hat{y}$ la del corredor en D)
d) La aceleración instantánea en los puntos A y B es nula, y en los puntos C y D apunta hacia el centro de la pista.
e) Vector velocidad media: 0
Velocidad escalar media: 5 m/s

Tiro oblicuo

3- a) t_V = 6 s

b) H_{max} = 45 m

c) $x_{alcance}$ = 240 m

d) $\vec{v}$ (t = 5 s) = (40, –20) m/s

e) $\vec{v}_{final}$(t = 6s) = (40, –30) m/s

f) $\Delta\vec{r}$ (t = 0 s $\rightarrow t = t_{max}$) = (120, 45) m

$\Delta\vec{r}$ (t =0 s $\rightarrow t = t_{alcance}$) = (240, 0) m

$\vec{v}_m$ (t = 0 s$\rightarrow t = t_{max}$) = (40,15) m/s

$\vec{v}_m$ (t = 0 s$\rightarrow t = t_{alcance}$) = (40, 0) m/s

$\vec{a}_m$ (t = 0 s $\rightarrow t = t_{max}$) = (0,–10) m/s^2

$\vec{a}_m$ (t = 0 s $\rightarrow t = t_{alcance}$) = (0,–10) m/s^2

4- a) d_{encima} = 3,25 m

b) $d_{otro\ lado}$ = 4,5 m

5- a) $H_{partida}$ = 4,4 m

b) $\vec{v}_{manos}$ = (6, –8) m/s; $|\vec{v}_{manos}|$ = 10 m/s.

c) $y(x)$ = 4,4 m – 5 x^2/ (36 m)

6- a) $|\vec{v}_A|$ = 5 m/s; $|\Delta\vec{y}|$ = 7,5 m.

$\vec{v}_B$ = (4,33 ; –12,5) m/s; $|\vec{v}_B|$ = 13,23 m/s.

7- a) De elaboración personal.

b) De elaboración personal.

c) $x_{max} = v_o^2$ sen (2α) / g $\quad y_{max} = v_o^2$ sen^2 (α) / (2g)

d) $\vec{v}_{y\,max} = v_{ox}\,\hat{x}$; $\vec{v}_A = v_{ox}\,\hat{x} - v_{oy}\,\hat{y}$; $\vec{a}_{ymax} = \vec{a}_A$ = g (–$\hat{y}$)

($\hat{x}$ es horizontal en el sentido de movimiento; $\hat{y}$ es vertical hacia arriba, el origen de coordenadas está en el punto de lanzamiento)

8- a) $x_{alcance}$ = 42,2 m

b) $\vec{v}_{piso} \approx$ (5,7 ; –63) m/s

9- a) ángulo ≈ 56°

b) $H_{impacto} \approx$ 1,2 m

c) De elaboración personal

10- a) De elaboración personal.

b) $v_x(t)$ = –3,6 m/s $\quad v_y(t)$ = 3,6 m/s^2 t

$\vec{a}$ = (0 ; 3,6) m/s^2

c) acelerando, gira en dirección $\hat{y}$

d) $\Delta\vec{r}$ = (–10,8 ; 16,2) m;

$\vec{v}_{media}$ = (–3,6 ; 5,4) m/s;

$\vec{a}_{media}$ =(0 ; 3,6) m/s^2.

Movimiento circular

La unidad de frecuencia en el Sistema Internacional (SI) es el *hertz*, que implica ciclos por segundo; la unidad SI de velocidad angular es el *radián por segundo*. Aunque sería formalmente correcto escribir estas dos unidades como segundo a la potencia menos uno, el empleo de nombres diferentes sirve para subrayar la diferente naturaleza de las magnitudes consideradas. El hecho de utilizar la unidad radián por segundo para expresar la velocidad angular y el hertz para la frecuencia, indica también que debe multiplicarse por 2π el valor numérico de la frecuencia en hertz para obtener el valor numérico de la velocidad angular correspondiente en radianes por segundo.

11- a) ω = 83,3π rad/s

b) $|\vec{v}|$= 15,7 m/s

c) f = 41,66 Hz.

12- a)1 s; 30 v ;

b) $|\vec{v}_{10}|$ = 0,2 π m/s;

$|\vec{v}_{20}|$ = 0,4 π m/s;

$|\vec{v}_{30}|$ = 0,6 π m/s.

13- r = 5102 m (aproximadamente)

14- a) $\omega = \omega_0 / 3$

b) $f = f_0 / 3$

c) $|\vec{a_c}| = |\vec{a_{c0}}| / 9$

15- a) $|\vec{v_E}| \approx 463$ m/s = 1665 km/h

b) $|\vec{v_T}| \approx 425$ m/s =1530 km/h

c) $|\vec{v_P}| = 0$ m/s

16- a) $|\vec{a_C}| = 0{,}034$ m/s^2

b) $\tau = 5062$ s $\approx 1{,}4$ h

17- a) 5 rad/s;

b) 25 m/s^2 ;

c) no cambia.

18- a) $|\omega| = 0{,}0172$ rad/día

b) $|\vec{v}| = 29861$ m/s (aprox.)

c) $\theta = 0{,}516$ rad = 29° 33'

d) $|\vec{a}| = 5{,}9\ 10^{-3}$ m/s^2.

19- t = 816.6 días

20- a) $|\omega| = \pi/2700$ rad/s

b) $|\vec{v}| = 7760$ m/s.

c) De elaboración personal.

21- a) $|\omega| = 2{,}2$ rad/s

b) $T \approx 2{,}856$ s; $f \approx 0{,}36$ hertz

c) $t_{780°} \approx 6$ s

d) $t_{12rev} \approx 34{,}33$ s

e) $\vec{v_1}(r = \hat{y}) = (2{,}2$ m/s; 0); $\vec{v_2}(r = \hat{x}) = (0; -2{,}2$ m/s);

$\vec{v_3}(r = -\hat{y}) = (-2{,}2$ m/s; 0); $\vec{v_4}(r = -\hat{x}) = (0; 2{,}2$m/s);

$\vec{a_1}(r = \hat{y}) = (0; -4{,}84$ m/s^2); $\vec{a_2}(r = \hat{x}) = (-4{,}84$ m/s^2; 0);

$\vec{a_3}(r = -\hat{y}) = (0; 4{,}84$ m/s^2); $\vec{a_4}(r = -\hat{x}) = (4{,}84$ m/s^2; 0).

22- a) $|\vec{v}| = 31{,}4159$ cm/s , en todos los puntos.

b) $f_B = 0{,}56$ hertz

c) $|a_x| = v_t^2 / R_A = 329$ cm/s^2 ; $a_y = 0$ cm/s^2;

$|a_z| = v_t^2 / R_B = 109{,}7$ cm/s^2.

23- a) $\theta(t) = 10\ t^4 - 8\ t^3 + 8\ t^2$

b) $\omega(t) = 40\ t^3 - 24\ t^2 + 16\ t$

c) En un sistema de referencia donde los ángulos se miden a partir del versor $\hat{x}$ en sentido hacia el versor $\hat{y}$.

$\vec{v}\ (t = 0{,}3$ s) = –2,68 m/s $\hat{x}$ + 4,02 m/s $\hat{y}$

$\vec{a}\ (t = 0{,}3$ s) = –23,88 m/s^2 $\hat{x}$ + 3,42 m/s^2 $\hat{y}$

24- En un sistema de referencia en que los ángulos se miden en sentido antihorario:

a) $\gamma_A = \pi/4$ 1/s^2

$\omega_A(t) = -4\pi$ 1/s + $\pi/4$ 1/s^2 t

$\Delta\theta_A = -4\pi$ 1/s t + $\pi/8$ 1/s^2 t^2

$\gamma_B = \pi$ 1/s^2

$\omega_B(t) = -8\pi$ 1/s + π 1/s^2 t

$\Delta\theta_B = -8\pi$ 1/s t + $\pi/2$ 1/s^2 t^2

b) $t_\omega = 16/3$ s $\approx 5{,}33$ s; $t_v = 48/7$ s $\approx 6{,}86$s

c) $\Delta\theta_A(t_\omega) = -160/9\ \pi$ rad $\approx -17{,}8\ \pi$ rad

$\Delta\theta_B(t_\omega) = -256/9\ \pi$ rad $\approx -28{,}5\ \pi$ rad

$\Delta\theta_A(t_v) = -1056/49\ \pi$ rad $\approx -21{,}55\ \pi$ rad

$\Delta\theta_B(t_v) = -1536/49\ \pi$ rad $\approx -31{,}35\ \pi$ rad

25- El ángulo θ se mide desde el punto A en sentido antihorario.

a) $\gamma_G(t) = 0$ 1/s^2

$\omega_G(t) = -\pi$ 1/s

$\theta_G(t) = -\pi$ 1/s t

$\gamma_M(t) = -\pi$ 1/s^2

$\omega_M(t) = -\pi$ 1/s $-\pi$ 1/s^2 t

$\theta_M(t) = \pi/2 - \pi$ 1/s $t - \pi/2$ 1/s$^2 t^2$

$t_E = 1$ s ; $\theta_M(t_E) = \theta_G(t_E) = -\pi$ rad

b) $\omega_G(t_E) = -\pi$ rad/s

$\vec{v_G}(t_E) = 7{,}5\ \pi$ m/s $\hat{y}$

$\vec{a_G}(t_E) = 7{,}5\ \pi^2$ m/s^2 $\hat{x}$

$\omega_M(t_E) = -2\ \pi$ rad/s

$\vec{v_M}(t_E) = 15\ \pi$ m/s $\hat{y}$

$\vec{a_M}(t_E) = 7{,}5\ \pi$ m/s^2 $\hat{y}$ + 30 π^2 m/s^2 $\hat{x}$

26 - De elaboración personal

3_Movimiento relativo

1- De elaboración personal.

Verdaderos: a)-h)-j)-k)

2- Respecto de tierra $|\Delta\vec{x}|$= 3795 m y $|\Delta\vec{y}|$= 800 m;

repecto del avión $|\Delta\vec{x}|$= 0 m y $|\Delta\vec{y}|$= 800 m.

$\vec{v}_{PT}$ (y= 0 m) = (300,–126,5) m/s

$\vec{v}_{PA}$ (y= 0 m) = (0,–126,5) m/s.

($\hat{x}$ es horizontal en el sentido del mov del avión e $\hat{y}$ vertical apuntando hacia arriba).

3- a) $\vec{v}_{JD}$ = –2,5 m/s $\hat{x}$

($\vec{v}_{JT}$=–1,5 m/s $\hat{x}$; $\vec{v}_{DT}$=1 m/s $\hat{x}$) ;

$\vec{v}_{casaJ\,D}$ = –1 m/s $\hat{x}$

$\vec{v}_{casaD\,D}$ = –1m/s $\hat{x}$

b) $x_{JD}(t)$ = 900 m – 2,5 m/s $t \rightarrow x_{JD}(t_E)$ = 0 m

c) t_E = 360 s (6 min)

$x_{casaJ\,D}(t_E)$= 540 m

$x_{casaD\,D}(t_E)$= –360 m

d) De elaboración personal

4- a) a_{NB} = –3 m/s^2

$v_{NB}(t)$ = –3 m/s^2 t

$x_{NB}(t)$ = 24 m – 1,5 m/s^2 t^2

b) De elaboración personal

5- $|a| \geq (v_1 - v_2)^2/$ (2.**d**)

6- $|\vec{v}_{BR}|$ = 9 m/s

$|\vec{v}_{RT}|$ = 1 m/s

7- d = 1200 m

8- $|\vec{v}_{gT}|$ = 5,77 km/h

$|\vec{v}_{gA}|$= 11,54 km/h

9- $|\vec{v}_{cT}|$ = 25,227 km/h **S** 37,55° **O**

10- a) $|\vec{v}_{aT}|$ = 382,4 km/h **E** 9,6° **N**

b) t_{vuelo} = 1,05 h

11- a) $|\vec{v}_{VT}|$ = 9 km/h

b) $|\vec{v}_{VB}|$ = 12 km/h

12- a) α = 37°

b) $|\vec{v}_{RT}|$ = 5 km/h

c) Δt = 10 min; $d \approx$ 1333m

Opcionales

13- a) De elaboración personal.

b) v_x = R ω [1 – cos (ωt)];

v_y = R ω sen (ωt);

a_x = R ω^2 sen (ωt);

a_y = R ω^2 cos (ωt).

c) De elaboración personal.

14- a) R = (v_0 . cosα)^2 / g

b) $v_x^2/g \approx$ 7,5 m

c) sube v_x= 8,66 m/s v_y = 3,5 m/s

h_{max}= 1,25 m $h_{max}/2$ = 0,625 m

1) t_{subida} = 0,146 s $|v_{subida}|^2$ = 87,56 (m/s)^2

β (0,146 s)=arctan v_y/v_x =22,24°

a_n = 10 m/s^2 . cos β = 9,256 m/s^2

R (t= 0,146s) = 87,56 (m/s)^2/9,256 m/s^2= 9,45 m

2) Da lo mismo por la simetría del problema, hagámoslo:

t_{bajada} = 0,854 s $|v_{bajada}|^2$ = 87,56 (m/s)^2

β (0,854s) = arctan (v_y/v_x) = – 22,24°

a_n= 10 m/s^2 . cos β = 9,256 m/s^2

R (t = 0,854 s) = 87,56 (m/s)^2/9,256m/s^2 = 9,45 m

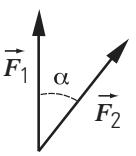
Unidad 3
Estática

1_ Estática del cuerpo puntual

1.1- Hallar gráfica y analíticamente el módulo y la dirección de la fuerza equilibrante del siguiente sistema de fuerzas concurrentes aplicadas a un cuerpo: $|\vec{F}_1|$ = 4,5 kgf N 45° E ; $|\vec{F}_2|$ = 23 N hacia el este y $|\vec{F}_3|$ = 1,4 kgf hacia el sur.

1.2-a) En el sistema de la figura, dos fuerzas de igual módulo forman un ángulo α. Sabiendo que el vector $\vec{F}_1$ es un vector fijo y en dirección vertical, calcular la equilibrante (módulo, dirección y sentido) si el ángulo α toma los siguientes valores:

α = 30°
α = 45°
α = 60°
α = 90°
α = 180°

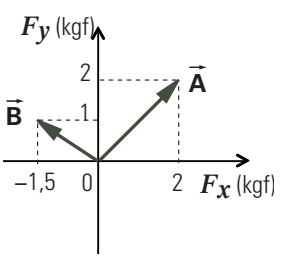


b) ¿La equilibrante está en el plano formado por las fuerzas? ¿Por qué?

1.3- En el sistema de la figura se conocen las fuerzas $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y las direcciones de las fuerzas $\vec{C}$ y $\vec{D}$: $\vec{C}$ es vertical y $\vec{D}$ es horizontal.

a) Expresar cada fuerza como vector en coordenadas cartesianas.

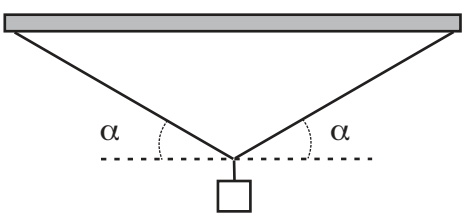
b) Determinar los módulos y sentidos de las fuerzas $\vec{C}$ y $\vec{D}$ para que el sistema de fuerzas se encuentre en equilibrio.



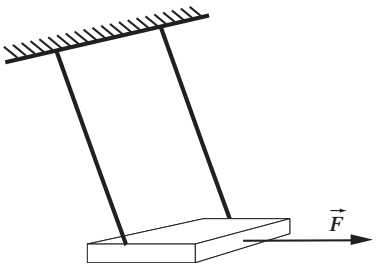
Nuestras sogas tendrán de ahora en adelante características especiales: serán hilos muy delgados de masa pequeña (despreciable) e inextensibles, y las denominaremos *sogas ideales*.

1.4- Un objeto de 45,4 kgf de peso está suspendido mediante dos cuerdas que forman un ángulo α con un techo horizontal. Calcular la intensidad de la tensión en cada cuerda si:

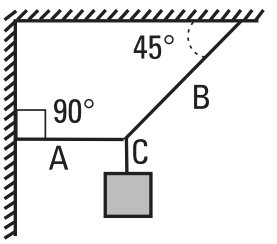
a) α = 30°; b) $\alpha \to 90°$; c) $\alpha \to 0°$.



1.5- Una persona que pesa 400 N se sienta en un columpio cuyos cables podrían romperse con una fuerza de 68 kgf. Calcular la máxima fuerza que podría aplicarse al columpio con una cuerda horizontal sin que lleguen a romperse los cables.



1.6- Hallar la intensidad de la tensión en las cuerdas, si el peso que soportan es de 200 kgf.



1.7-Tres cables A, B y C atados a único nudo se mantienen tirantes y en equilibrio. Las tensiones de los cables A y B son de 45 kgf cada una.

Calcular la intensidad de la tensión del cable C, en los siguientes casos:

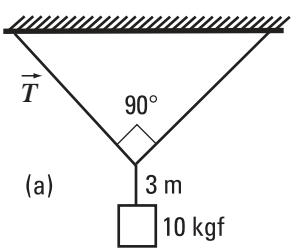
a- A y B son paralelos. Analizar igual sentido y sentido contrario.

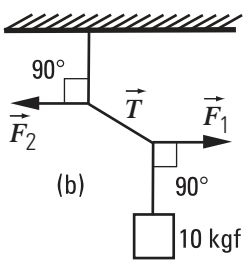
b- A y B son perpendiculares.

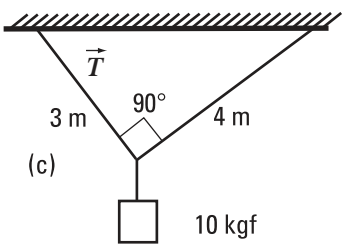
1.8- Indicar en qué casos puede ser calculada la tensión $\vec{T}$, si sólo están dadas las cantidades que se indican en las figuras.

Considerar: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$.

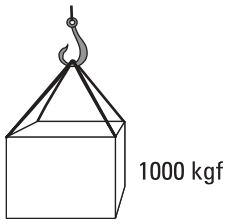
En el caso en que la información sea insuficiente, indicar qué dato es necesario para poder resolver el problema.





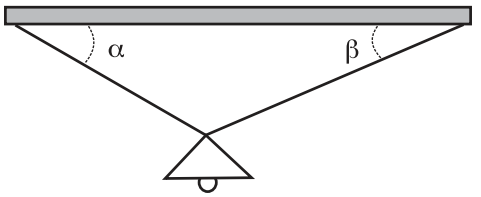


1.9- Calcular qué ángulo máximo pueden formar con la vertical las cuatro cuerdas de la figura, para que la fuerza que soporta cada una no exceda los 500 kgf. (Use consideraciones de simetría).



1.10- La lámpara de la figura que pesa P está sostenida por dos cuerdas como muestra la figura.

Hallar las intensidades de la tensión en la cuerda de la izquierda ($\vec{T}_i$) y en la cuerda de la derecha ($\vec{T}_d$) si los ángulos α y β toman los siguientes valores, respectivamente:



a) 45° y 45° b) 37° y 53°
c) 30° y 60° d) 53° y 37°
e) 30° y 30° f) 60° y 30°

2_ Estática del cuerpo extenso

2.1- Dadas las siguientes afirmaciones, referidas a un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo extenso:

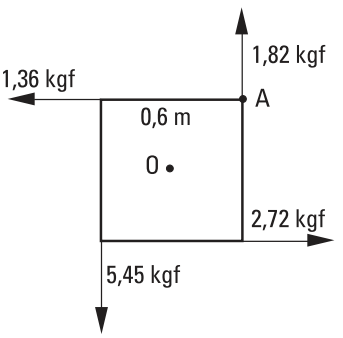
I) La suma de las fuerzas es cero
II) La suma de los momentos de las fuerzas respecto a un punto es cero
III) La suma de los momentos de las fuerzas respecto a dos puntos distintos, son nulos

Entonces está en equilibrio si se cumple:

a) solamente I
b) solamente II
c) solamente III
d) I y II simultáneamente
e) ninguna de las anteriores es la correcta.

2.2- El radio del volante de un vehículo es de 23 cm. El conductor ejerce una fuerza de 1,82 kgf tangente al volante haciéndolo girar en sentido horario. ¿Qué momento, con respecto al eje, produce? ¿Qué fuerza debería ejercerse sobre el volante para que éste no gire? ¿Dónde la aplicaría?

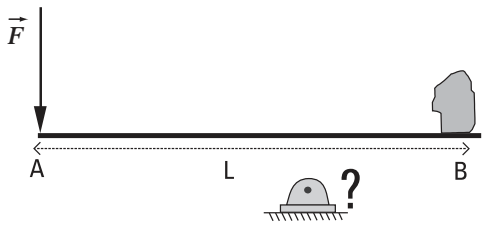
2.3- Un cuadrado tiene 0,6 m de lado. A lo largo de sus lados actúan fuerzas de 1,36 kgf; 1,82 kgf; 2,72 kgf y 5,45 kgf, respectivamente.



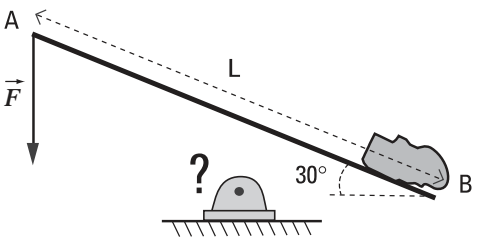
Calcular el momento total:
a) Con respecto al centro del cuadrado O.
b) Con respecto al punto A (ver figura)

2.4- Dónde habrá que colocar un apoyo fijo en la tabla para usarla a modo de palanca si se desea mantener en equilibrio una piedra de peso 225 kgf ubicada en el extremo B, aplicando una fuerza de 25 kgf en el extremo A. La longitud de la tabla es de 2 m y el peso despreciable.

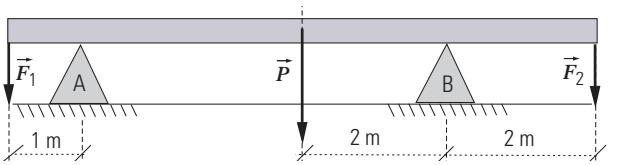
a- La tabla está horizontal.



b- La tabla está inclinada 30°.



2.5- Una barra homogénea en equilibrio se encuentra apoyada sobre los apoyos A y B (ver figura). Determinar las fuerzas ejercidas sobre la barra por los dos apoyos , $\vec{R}_A$ y $\vec{R}_B$. La barra pesa 80 N y mide 8 m. Datos: $|\vec{F}_1|$ = 20 N y $|\vec{F}_2|$ = 40 N.

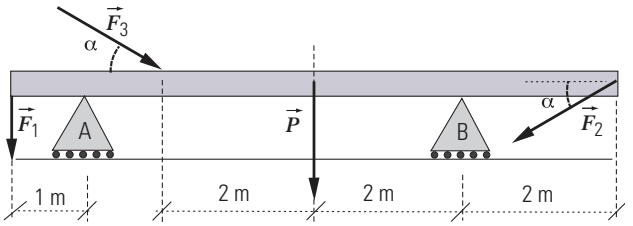


2.6- a) Si en el sistema de la figura del ejercicio **2.5** se quita el apoyo A, calcular dónde debe ubicarse el apoyo B para seguir manteniendo al sistema en equilibrio.

b) Si ahora se quita el apoyo B, ¿dónde se ubicaría el apoyo A?

2.7- Se quiere mantener en equilibrio el sistema de la figura. La barra es homogénea y de 8 m de longitud. Calcular las fuerzas ejercidas por los apoyos A y B.

Datos: $|\vec{F}_1|$ = 20 N; $|\vec{F}_2|$ = 40 N; $\alpha = 30°$;
$|\vec{P}_{barra}|$ = 80 N.



2.8- Un levantador de pesas levanta una haltera (barra con discos en los extremos) cuyo peso es de 100 kgf. El hombre pesa 60 kgf. Determinar en la fase final del ejercicio, brazos extendidos y pies juntos, qué fuerza ejerce cada brazo si el ángulo que forman con la barra es de:

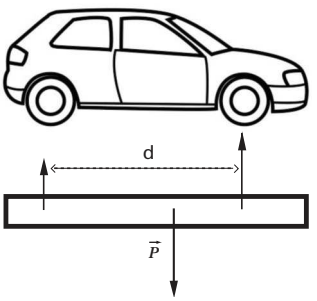
a) 90°

b) 60 °

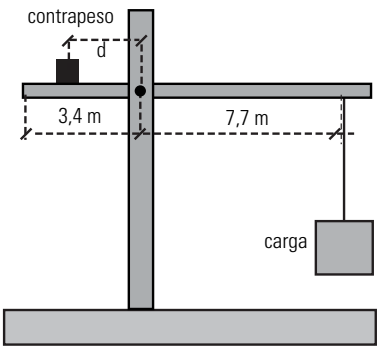
2.9- Una revista especializada informa que cierto auto deportivo tiene 53 % de su peso en las ruedas delanteras y el 47 % sobre las traseras, con una distancia entre ejes de d = 2,46 m.

Esto implica que la fuerza normal total sobre las ruedas delanteras es de 0,53 **P** y sobre las traseras, de 0,47 **P**, donde **P** es el peso total. Al espacio entre el eje delantero y trasero se llama distancia entre ejes.

¿Qué tan adelante del eje trasero está el centro de gravedad del automóvil?



2.10- Una grúa torre como muestra la figura, debe siempre estar cuidadosamente balanceada de manera que no haya un torque (o momento) neto que tienda a voltearla.



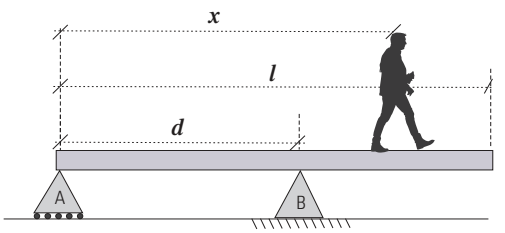
Una grúa está a punto de levantar una carga de 2800 kgf. Las dimensiones de la grúa se muestran en la figura, si la viga es horizontal y de masa despreciable:

a- ¿Dónde debe colocarse el contrapeso de 9500 kgf cuando la carga se levanta desde el suelo? Observe que en general el contrapeso se desplaza por medio de sensores y motores precisamente para compensar la carga.

b- Determine la carga máxima que puede ser levantada cuando el contrapeso se coloca en el punto extremo de la grúa.

2.11- En la figura, la viga uniforme tiene una longitud l y pesa 112,5 kgf. La viga puede rotar alrededor del punto fijo B y se apoya en el punto A. Un hombre que pesa 75 kgf camina a lo largo de la viga, partiendo de A.

Datos: l = 4 m; d = 2,5 m



a) Calcular la máxima distancia que el hombre puede caminar a partir de A manteniendo el equilibrio.

b) Representar gráficamente la fuerza que ejerce el apoyo A como una función de la distancia x.

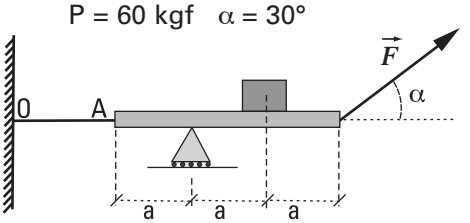
2.12- Un cuerpo de peso **P** está apoyado sobre un tablón de masa despreciable. Calcular:

a- La intensidad de la fuerza necesaria para mantener el tablón en equilibrio horizontalmente.

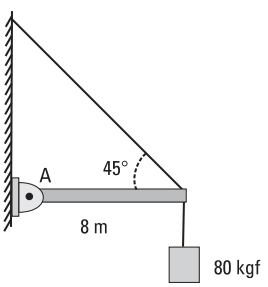
b- La intensidad de la fuerza en el apoyo.

c- La intensidad de la tensión en el cable OA.

P = 60 kgf $\alpha = 30°$

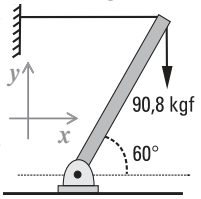


2.13- Hallar la intensidad de la tensión que soporta el cable de la figura, y las componentes (x,y) de la fuerza de vínculo en el punto A, para que la barra de la figura permanezca en equilibrio; la barra tiene una longitud de 8 m, es homogénea y pesa 40 kgf.



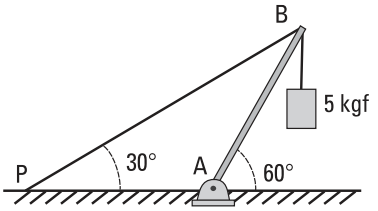
2.14- Un cuerpo de 90,8 kgf de peso está fijo al extremo superior de un poste, de masa despreciable, articulado en el piso que forma un ángulo de 60° con la horizontal. Un cable horizontal está fijo a dicho extremo.

Calcular la tensión del cable y la fuerza ejercida por la articulación (expresar el resultado en cordenadas cartesianas y polares).



2.15- La figura representa una barra homogénea de peso 50 kgf en equilibrio articulada en el punto A. En el extremo B se ha suspendido una carga de 5 kgf. Dicho extremo B está unido a un punto fijo P mediante un cable de masa despreciable. Calcular:

a- La fuerza ejercida por la articulación A sobre la barra. Expresar dicha fuerza tanto vectorialmente como en su notación polar: módulo y ángulo respecto del eje horizontal. Comparar este último con el ángulo de 60 grados que la barra hace con la horizontal.

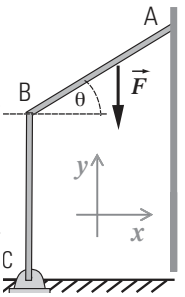


b- La intensidad de la tensión del cable.

2.16 La barra rígida de peso despreciable, mostrada en la figura, tiene un extremo C unido al piso por medio de una articulación, y su otro extremo A se apoya en una pared vertical. El segmento BC es perpendicular al piso. Sabiendo que la intensidad de la fuerza vertical $\vec{F}$ es de 40 kgf y que está aplicada en el punto medio de AB, que BC = 0,7 m; AB = 0,5 m, θ = 37° y que la pared vertical es perfectamente lisa, calcular:

a) El vector fuerza de reacción de la pared en el punto A.

b) El vector fuerza de reacción en el punto C.

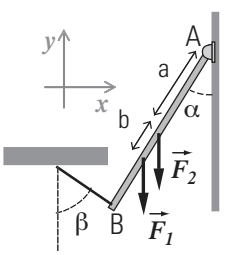


2.17 Una varilla homogénea de 40 cm de longitud y de peso despreciable, se encuentra en equilibrio sostenida en un extremo (A) por una articulación y en el otro (B) por una soga inextensible y de masa despreciable. Sobre la varilla actúan las fuerzas verticales $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, según muestra la figura. Siendo α = 30°; β = 60°; a = 20 cm y b = 4 cm; $|\vec{F}_1|$ = 5 kgf y $|\vec{F}_2|$ = 10 kgf.

Calcular, expresándolas vectorialmente:

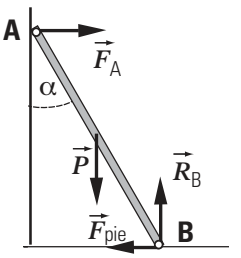
a) La fuerza que ejerce la soga sobre la varilla.

b) La fuerza que hace la articulación en A sobre la varilla.



2.18- Una escalera homogénea de 50 kgf descansa sobre una pared vertical formando un ángulo α de 30°.

¿Cuáles serán los valores de las fuerzas en los puntos de apoyo A y B, sabiendo que para mantener el equilibrio la escalera se empuja con el pie en el punto B?



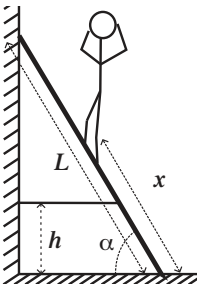
No hay rozamiento entre la escalera y la pared ni entre la escalera y el piso.

2.19- Repetir el ejercicio anterior con α = 60°. Compare los resultados. Observe el cambio de las distintas fuerza con el incremento del ángulo α.

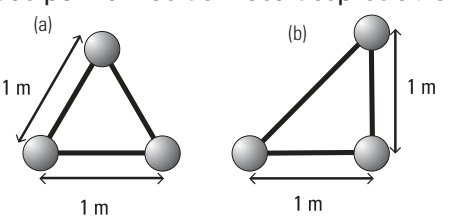
2.20- Una escalera de peso $\mathbf{P_E}$ y longitud **L**, está apoyada en la pared y sostenida por una cuerda como indica la figura. La cuerda soporta a lo sumo un esfuerzo máximo de 60 kgf.

Calcular hasta que posición x de la escalera puede subir un hombre de peso $\mathbf{P_H}$ sin que se rompa la cuerda. No existe rozamiento entre la escalera y el piso ni entre la escalera y la pared. Datos:

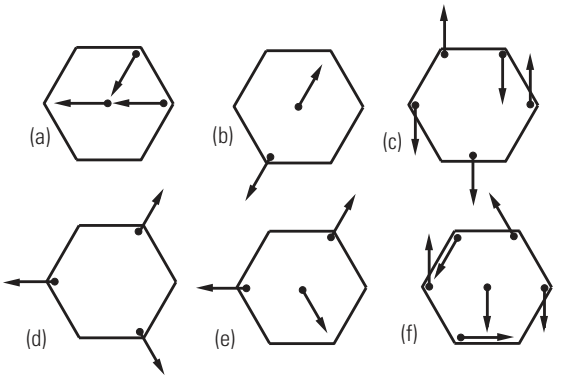
$\mathbf{P_H}$ = 60 kgf; $\mathbf{P_E}$ = 20 kgf;
α = 53°; **L** = 3 m; h = 0,7 m.



2.21- Hallar el centro de gravedad de los cuerpos en los casos a y b de la figura analíticamente. Graficarlos. Las esferas son homogéneas e iguales y están unidas por varillas de masa despreciable.



2.22- Las figuras representan cuerpos rígidos con sistemas de fuerzas aplicada, todas ellas de módulo igual a 1 N. Determine qué sistemas son equilibrados y cuáles no. En estos últimos, encuentre dos pares de sistemas equivalentes entre sí. En los sistemas que no están equilibrados, indique una fuerza equilibrante, si existe. Si no existe, indique un sistema equilibrante.



Respuestas

Se ha adoptado el módulo de $|\vec{g}|$ = 10 m/s²; 1kgf = 10 N.

1_ Estática del cuerpo puntual

1.1- 5,76 kgf α = S 72° O.

1.2- De elaboración personal.

1.3- a- $\vec{A}$ = (2; 2) kgf ; $\vec{B}$ = (–1.5; 1) kgf;
$\vec{C}$ = (0; c) kgf; $\vec{D}$ = (d; 0) kgf.

b- $\vec{C}$= (0; –3) kgf; $|\vec{C}|$ = 3 kgf;
$\vec{D}$ = (–0,5; 0) kgf; $|\vec{D}|$ = 0,5 kgf.

1.4- a) 45,4 kgf.
b) De elaboración personal.
c) De elaboración personal.

1.5- 1300 N

1.6- $|\vec{T}_A|$ = 200 kgf $|\vec{T}_B|$ = 283 kgf $|\vec{T}_C|$ = 200 kgf

1.7- a- Si tienen igual sentido $|\vec{T}_C|$ = 90 kgf; si tienen sentido contrario $|\vec{T}_C|$ = 0.
b- $|\vec{T}_C|$ = 63,64 kgf

1.8– En (c) no faltan datos. En (a) es necesario dar algún ángulo o longitud de las cuerdas oblicuas. En (b) es necesario el módulo de las fuerzas horizontales o el ángulo de la cuerda oblicua.

1.9- 60°

1.10- a- $|\vec{T}_i|$ = 0,7 P $|\vec{T}_d|$ = 0,7 P
b- $|\vec{T}_i|$ = 0,6 P $|\vec{T}_d|$ = 0,8 P
c- $|\vec{T}_i|$ = 0,5 P $|\vec{T}_d|$ = 0,866 P
d- $|\vec{T}_i|$ = 0,8 P $|\vec{T}_d|$ = 0,6 P
e- $|\vec{T}_i|$ = P $|\vec{T}_d|$ = P
f- $|\vec{T}_i|$ = 0,866 P $|\vec{T}_d|$ = 0,5 P

2_ Estática del cuerpo extenso

2.1- d)

2.2- –0,4186 kgf m (según convención momento de giro horario negativo).
$|\vec{F}|$ = 1,82 kgf, tangente al volante en sentido tal que provoque un momento de giro antihorario.

2.3- a- 3,405 kgf m
b- 4,902 kgf m (Note que si las cuatro fuerzas fueran del mismo módulo, la respuesta sería la misma para O y A)

2.4- En ambos casos, a 0,20 m del extremo B, medidos sobre la tabla.

2.5- $|\vec{R}_A|$ = 40 N; $|\vec{R}_B|$ =100 N; ambas hacia arriba.

2.6- a- 4/7 m medidos desde el punto de aplicación del peso hacia la derecha (24/7 m medidos desde el punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}_2$).
b- Igual que la anterior.

2.7- $|\vec{R}_A|$ = 64 N ; $|\vec{R}_B|$ = 76 N.

2.8- $|\vec{F}|$ = 50 kgf; $|\vec{F}|$= 57,7 kgf.

2.9- x_{CG} = 1,3 m

2.10 - a- 2,3 m a la izquierda de la torre.
b- 4194 kgf

2.11- a- 3,25 m **b-** $|\vec{R}_A|$ = 97,5 kgf – 30 kgf/m . x
Gráfico de elaboración personal.

2.12- a- $|\vec{F}|$ = 60 kgf; **b-** $|\vec{N}|$ = 30 kgf; **c-** $|\vec{T}_{OA}|$ = 52 kgf

2.13- $|\vec{T}|$ = 141 kgf
F_{Ay} = 20 kgf y dirigida hacia arriba
F_{Ax} = 100 kgf y dirigida hacia la derecha

2.14- $\vec{T}$ = (–52,4; 0) kgf; $|\vec{T}|$ = 52,4 kgf; θ = 180°
$\vec{F}_A$ = (52,4; 90,8) kgf; $|\vec{F}_A|$= 104,8 kg; θ = 60°

2.15- a- F_{Ax} = 26 kgf, hacia la derecha
F_{Ay} = 70 kgf, hacia arriba
$|\vec{F}_A| \approx$ 75 kgf; $\alpha \approx$ 70 °
b- $|\vec{T}|$ = 30 kgf

2.16- $\vec{R}_A$ = (–8; 0) kgf b) $\vec{R}_C$ = (8; 40) kgf

2.17- a) $\vec{T}$ = 4kgf (–sen 60°; cos 60°) = (–3,4 ; 2) kgf

b) $\vec{R}_A$ = (3,4; 13) kgf

2.18- $|\vec{R}_B| = |\vec{P}|$ = 50 kgf; $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_{pie}|$ = 14,43 kgf.
$\vec{F}_B = \vec{R}_B + \vec{F}_{pie}$

2.19- $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_{pie}|$ = 43,30 kgf

De elaboración personal.

2.20- x = 2,3 m

2.21- Eligiendo el origen de coordenadas para cada caso en el centro de la esfera de la izquierda y en plano vertical los (ejes x,y):
a- x_{CG} = 0,50 m y_{CG} = 0,29 m
b- x_{CG} = 0,67 m y_{CG} = 0,33 m

2.22- De elaboración personal.

Unidad 4
Hidrostática

1_ Ejercicios

Se ha adoptado el módulo de $|\vec{g}|$= 10 m/s²; 1kgf = 10 N; presión atmosférica normal = 101300 Pa = 1 atm. En todos los ejercicios, salvo aclaración, siempre supondremos que la presión atmosférica es de 1 atm.

Para la resolución de los ejercicios propuestos se dispone de la siguiente tabla de densidades:

Material	Densidad (kg/m³)
Agua (4 ºC y p = 1 atm)	1000
Agua de Mar (15 ºC y p = 1 atm)	1025
Aire (0 ºC y p = 1 atm)	1,29
Aire (20 ºC y p = 1 atm)	1,20
Hierro a 20 ºC	7700
Mercurio a 0 ºC	13600
Oro a 20 ºC	19300
Plata a 20 ºC	10500
Plomo a 20 ºC	11300

1- Las suelas de los zapatos de una persona de 70 kilos tienen un área de 100 cm² cada una. ¿Cuál es la presión adicional en el suelo debido a la persona de pie?

2- A 150 metros de profundidad en el fondo del mar, se encuentra una baldosa prehispánica. Considerando que la baldosa tiene forma cuadrada, y que mide 20 cm de lado, calcule la presión absoluta y la fuerza que ejerce el agua de mar sobre la cara superior de la baldosa.

3- Si la altura del agua dentro de una bañera es de 25 cm y el tapón de la misma tiene un radio de 2 cm, calcular:

a) La superficie del tapón.

b) La presión en la cara superior y en la cara inferior del tapón.

c) La fuerza mínima que hay que ejercer para quitar el tapón.

4- Un recipiente abierto contiene mercurio hasta una altura de 10 cm. Expresar en pascales, atmósferas y mm de Hg, la presión manométrica (debida a la columna de mercurio) en el fondo del recipiente.

5- Si la parte superior de su cabeza tiene un área de 100 cm², ¿cuál es el peso del aire sobre usted? ¿Por qué no lo aplasta?

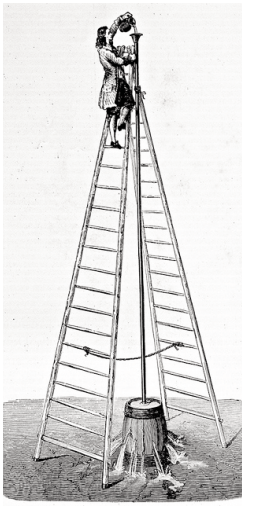
6- Dos vasos A y B contienen el mismo volumen de agua en equilibrio. El vaso A tiene una base de 2 cm² y contiene agua hasta 10 cm de altura. El B tiene una base de 4 cm² y la altura de agua es 5 cm.

a) Calcular la presión debida a la columna de agua en cada vaso a 4 cm de profundidad del borde.

b) ¿Cuál es la presión generada por el agua en el fondo de cada vaso?

c) Las presiones calculadas en los ítems anteriores, ¿son las presiones totales o las manométricas?

7- En 1646 Pascal realizó el experimento que se esquematiza en la figura.



El barril de vino tiene una tapa de 0,12 m² y está conectado a un tubo de 3,1 mm de radio. Llenó el barril de agua y luego fue echando agua en el tubo hasta que reventó el barril cuando la columna en el tubo tenía un alto de 12 m.

Calcular:

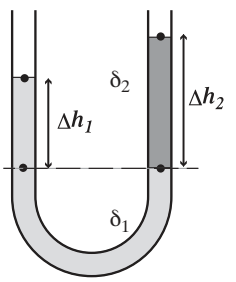
a) La presión manométrica en ambas caras de la tapa del barril.

b) La fuerza resultante debida al agua y al aire sobre la tapa cuando reventó.

c) El peso del agua en el tubo que provocó la ruptura de la tapa.

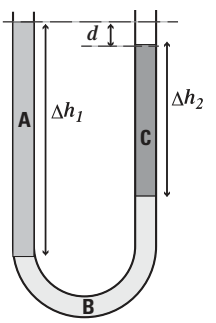
8- En el tubo en U abierto como se muestra en la figura, hay dos líquidos inmiscibles de densidad ρ_1 y ρ_2.

Si Δh_1 = 2 cm y Δh_2 = 3 cm y el líquido de la rama izquierda es agua, ¿cuánto vale ρ_2?



9- El tubo en forma de U mostrado en la figura contiene tres líquidos inmiscibles A, B y C.

Si las densidades de A y C son 500 kg/m³ y 300 kg/m³, respectivamente, calcular la densidad del líquido B.



Datos:

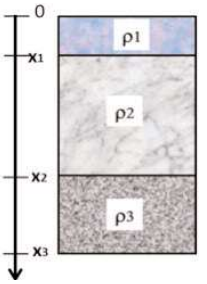
Δh_1 = 15 cm;

Δh_2 = 9 cm;

d = 1 cm

10- En la figura se muestra un recipiente abierto de un metro de altura que contiene tres líquidos inmiscibles.

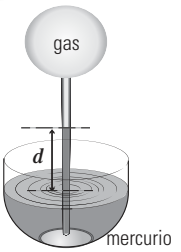
Determine la presión manométrica en el fondo del recipiente sabiendo que las densidades son 1 g/cm^3; 0,8 g/cm^3 y 13,6 g/cm^3 (no están en orden); x_1 = 20 cm; x_2 = 70 cm; x_3 = 1 m.



a) 148,7 kPa,
b) 47,4 kPa
c) 34,6 kPa
d) 3,46 kPa
e) 72,6 kPa
f) 46,8 kPa

11- El sistema que se muestra en la figura contiene mercurio hasta una altura d.

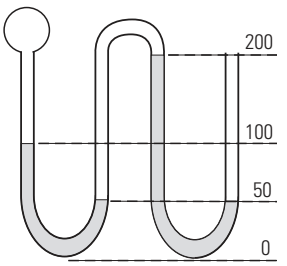
Dato: d = 20 cm



Calcular la presión del gas en el balón.

12- El tubo de la figura está cerrado por un extremo y abierto por el otro, y tiene mercurio en equilibrio alojado en las dos asas inferiores. Los números indican las alturas en milímetros.

Si la presión atmosférica es de 760 mm de mercurio y en el medio gaseoso se desprecia la variación de la presión con la altura, ¿cuánto vale, en esas mismas unidades, la presión en el interior de la ampolla del extremo cerrado?



13- Una ampolla contiene un gas a una presión de 98 kPa. Dicha ampolla está unida a un extremo de un tubo en forma de U que contiene agua en su interior. El otro extremo del tubo está abierto a la atmósfera. La presión atmosférica es normal.

Indicar cuál es la única opción correcta respecto a la altura que tiene el agua en las ramas del tubo:

a) El agua tiene la misma altura en ambas ramas del tubo.

b) La diferencia de altura entre ambas ramas es de 33 cm y en la rama en contacto con la atmósfera la altura es mayor.

c) La diferencia de altura entre ambas ramas es de 33 cm y en la rama en contacto con la atmósfera la altura es menor.

d) La diferencia de altura entre ambas ramas es de 13 cm y en la rama en contacto con la atmósfera la altura es mayor.

e) La diferencia de altura entre ambas ramas es de 13 cm y en la rama en contacto con la atmósfera la altura es menor.

f) No se puede saber en qué rama el agua alcanza mayor altura.

14- Los émbolos grande y pequeño de un elevador hidráulico cuyos diámetros son 24 cm y 8 cm están ubicados a igual altura.

a) ¿Cuál es el módulo de la fuerza que debe aplicarse al émbolo más pequeño para mantener en equilibrio un automóvil de 1000 kg de masa colocado sobre el émbolo grande?

b) ¿Si el émbolo grande asciende 5 cm, cuánto desciende el émbolo pequeño?

15- ¿Cuál es la masa de un cuerpo que flota en equilibrio sobre un líquido de densidad igual a 0,8 g/cm^3, desalojando 20 cm^3 de líquido?

16- Un cuerpo cuelga del techo mediante un hilo. Cuando está suspendido en el aire, la tensión del hilo es 600 N y cuando está sumergido totalmente en agua la tensión en el hilo que lo sostiene es 200 N. Calcular su densidad.

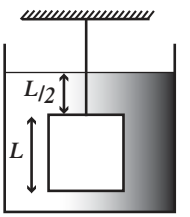
17- Un objeto cúbico de dimensión L = 0,6 m de lado y cuyo peso de 4450 N está suspendido mediante un alambre en un tanque abierto que contiene un líquido de densidad ρ = 944 kg/m^3. Encuentre los módulos de:

a) La fuerza que recibe el objeto sobre la cara superior .

b) La fuerza total hacia arriba en el fondo del objeto.

c) La tensión en el alambre.

d) El empuje sobre el cuerpo.



18- EL PROBLEMA DE LA CORONA DEL REY:

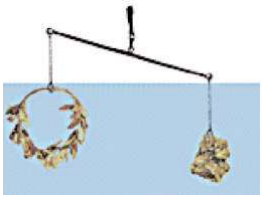
Según la leyenda, el rey Hierón le entregó 1 kg de oro a su joyero para la construcción de la corona real. Si bien esa fue la masa de la corona terminada, el rey sospechó que el artesano lo había estafado sustituyendo oro por plata oculta en el interior de la corona. Entonces le encomendó a Arquímedes que dilucidara la cuestión sin dañar la corona.

Arquímedes la sumergió en agua y observó que el volumen de líquido desplazado era 64,8 cm^3.

a) ¿Cuál debería ser el volumen de líquido desplazado por una auténtica corona de oro puro?

b) ¿Qué cantidad de oro sustituyó el joyero por plata?

c) En una balanza de brazos iguales se coloca la corona "trucha" de un lado e igual masa de oro del otro. En el aire el sistema está en equilibrio; cuando se sumerge en agua se desequilibra. ¿Qué pesa se debería agregar sobre la barra y en dónde para conseguir equilibrar el sistema?

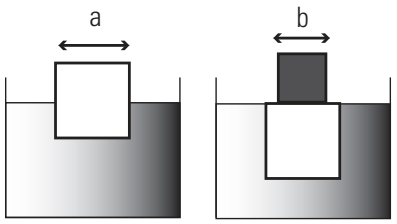


19- Un cuerpo tiene un peso aparente de 800 N sumergido totalmente en agua y de 600 N sumergido totalmente en un líquido de densidad igual a 1,2 g/cm^3. Hallar cuál es su peso aparente cuando está sumergido totalmente en alcohol de densidad igual a 0,8 g/cm^3.

20- Se quiere diseñar un globo aerostático cuya masa total, cuando está desinflado y con la carga incluída es de 200 kg. El aire en el interior del mismo se calienta con una llama de manera que su densidad es 0,95 kg/m^3 mientras que el aire exterior, más frío, tiene una densidad de 1,20 kg/m^3. Si el globo se encuentra suspendido en equilibrio, ¿cuál es el valor de su radio?

21- Calcular el volumen sumergido de un barco de 10 000 toneladas que flota en equilibrio. en agua de mar.

22- En la figura un cubo de arista 1 cm y densidad ρ_c flota en un líquido de densidad 1,4 g/cm^3, de modo que está sumergido hasta la mitad de su volumen. Otro cubo de igual densidad que el primero se apoya sobre éste y se observa que se sumerge al ras del líquido, es decir su cara superior queda en la superficie de separación aire líquido como indica la figura.



Hallar:
a) ρ_c
b) La arista b del bloque superior.

23- Un cuerpo cuyo peso tiene una intensidad P se mantiene en equilibrio totalmente sumergido en un líquido cuando se le aplica una fuerza vertical de intensidad $|\vec{F}|$ hacia abajo tal que $|\vec{F}| = 2$ P.
a)¿En esa situación, cuánto vale la intensidad del empuje?
b) Si se suprime $\vec{F}$, cuando el cuerpo queda en equilibrio hallar la intensidad del empuje y la fracción del volumen del cuerpo que emerge sobre la superficie.

24- Un iceberg es una masa de hielo que flota en agua de mar, debido a que la densidad del hielo, de alrededor de 920 kg/m^3, es menor que la densidad del agua de mar. ¿Cuál es la proporción entre volumen del iceberg que vemos sobre la superficie del agua y el volumen total del iceberg?

2_ Preguntas

Ahora que finalizó la guía de ejercicios, responda las siguientes preguntas sin hacer cálculos:

1- Dos vasos de vidrio rectos, de diferentes secciones transversales y que vacíos pesan lo mismo, se llenan con agua hasta el mismo nivel. De acuerdo con la expresión $p = p_0 + \rho . g . h$, la presión es la misma en el fondo de ambos vasos, ¿por qué, al llenarlos con agua, uno pesa más que el otro?

2- Un pedazo de acero está pegado a un bloque de madera. Cuando la madera se coloca en una pileta con agua, con el acero en la parte superior, la mitad del bloque se sumerge.
Si el bloque se invierte, de manera que el acero quede bajo el agua, ¿el volumen sumergido del bloque, aumenta, disminuye o permanece igual?

3- Dos cuerpos de igual volumen, uno de hierro y otro de aluminio, están en el agua.¿La intensidad del empuje que actúa sobre el cuerpo de hierro, es mayor, menor o igual a la intensidad del empuje que actúa sobre el cuerpo de aluminio? Considerar los siguientes casos:
a) Dos cuerpos macizos, en equilibrio, colgados de sogas y completamente sumergidos.
b) Dos barcos de igual forma que flotan en equilibrio en el agua.

4- Un litro de agua se ubica en tres recipientes cilíndricos, A, B y C, de diferentes bases, relacionadas entre sí por: $\text{Base}_A = 2\ \text{Base}_B = 1/3\ \text{Base}_C$.
¿En cuál de los recipientes, la presión en el fondo, p, es mayor?
a) $p_A > p_B > p_C$
b) $p_A < p_B < p_C$
c) $p_B > p_C > p_A$
d) $p_B < p_C < p_A$
e) $p_C > p_A > p_B$
f) $p_C < p_A < p_B$

5- ¿Cuál de las siguientes condiciones debe cumplirse para que un cuerpo flote con la mitad de su volumen sumergido en un líquido dado?
a) La densidad del cuerpo es la mitad de la densidad del liquido.
b) La densidad del cuerpo es doble que la densidad del líquido.
c) La densidad del cuerpo es igual a la densidad del líquido.
d) La densidad del líquido es la tercera parte de la densidad del cuerpo.

Respuestas

1- p = 35.000 Pa

2- p=1,6388 x 10^6 Pa; $|\vec{F}|$ = 65552 N

3- a- S =0,00125 m^2

b- p_s = 103800 Pa; p_i = 101300 Pa.

c- $|\vec{F}|$ = 3,14 N

4- p (10cm) = 0,1316 atm= 100 mm Hg = 13329 Pa

5- $|\vec{F}|$ = 1013 N; de elaboración personal.

6- a- p (4 cm) = 400 Pa (en ambos casos)

b- p (10 cm) = 1000 Pa (vaso A);
p (5 cm) = 500 Pa (vaso B)

c- Son presiones manométricas.

7- a- $p_{\text{c sup}}$ = 0; $p_{\text{c inf}}$ = 120000 Pa

b- $|\vec{F}|$ = 14400 N

c- P = 3,62 N.

8- ρ_2 = 666 kg/m^3

9- ρ_B = 960 kg/m^3

10- b)

11- p = 74100 Pa

12- p = 560 mm Hg

13- c)

14- a- $|\vec{F}|$ = 1111 N =111kgf

b- h = 45 cm

15- m = 16 g

16- ρ_{cuerpo} = 1500 kg/m^3

17- a- $|\vec{F}|$ = 37488 N

b- $|\vec{F}|$ = 39527 N

c- $|\vec{T}|$ = 2411 N.

d- $|\vec{E}|$ = 2039 N.

18- a- V_o =51,8 cm^3 ; **b-** 300 g de plata;
c- de elaboración personal.

19- P_C = 1000 N

20- R = 5,76 m

21- V = 9756 m^3

22- a- ρ_c = 0,7 g/cm^3; **b-** b = 1 cm.

23- a-$|\vec{E}|$ = 3 P

b- $|\vec{E}|$ = P; emerge 2/3 del volumen de cuerpo

24- Aproximadamente el 10%

Preguntas: de elaboración personal.

Unidad 5
Dinámica

En esta guía utilizamos la siguiente notación: los vectores están denotados en letra negrita cursiva y con una flechita superior, $\vec{F}$; el módulo de una magnitud vectorial está expresado entre barras, $|\vec{F}|$.

Para el cálculo de las respuestas de los ejercicios el valor del módulo del vector aceleración de la gravedad considerado es $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$.

En cada ejercicio realice un diagrama de cuerpo libre (DCL) indicando los pares de acción-reacción.

Leyes de la Dinámica

1- Un balde cuelga del cable de una grúa. Analizar las interacciones presentes y hacer el diagrama de cuerpo libre del balde en cada caso. Comparar las intensidades de las fuerzas entre un caso y otro. Si la masa del balde es 40 kg, determinar la fuerza que ejerce el cable, cuando el balde:

a) Permanece en reposo.
b) Sube con velocidad constante de 2 m/s.
c) Sube, aumentando su velocidad a razón de 2 m/s cada segundo.
d) Sube, disminuyendo su velocidad a razón de 2 m/s en cada segundo.
e) Cae libremente.

2- Un pasajero que viaja en ascensor está parado sobre una balanza que marca un peso menor en un 40% que el que indicaría si el ascensor permaneciera detenido.

Entonces, es posible que en ese momento el ascensor esté:

a) subiendo cada vez más rápido.
b) subiendo cada vez más despacio.
c) subiendo con velocidad constante.
d) bajando cada vez más despacio.
e) bajando con velocidad constante.
f) bajando en caída libre.

3- Un cuerpo de masa m se encuentra en reposo, apoyado sobre una mesa horizontal que presenta rozamiento despreciable.

Analizar, sin hacer cuentas:

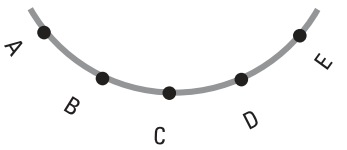
a) ¿Qué intensidad mínima tendrá la fuerza horizontal necesaria para moverlo?

b) ¿Qué aceleración tendrá si se le aplica una fuerza vertical, hacia arriba, de módulo igual al de su propio peso?

c) ¿Qué aceleración tendrá si se le aplica una fuerza horizontal, de módulo igual al de su propio peso?

4- Un cuerpo oscila dentro de una palangana como indica la figura.

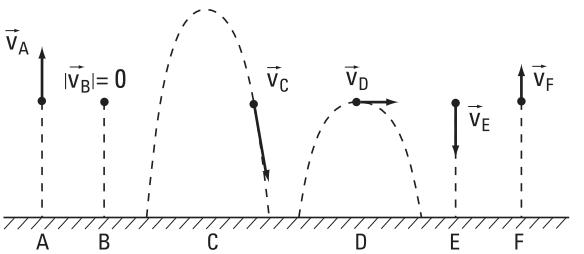
Dibujar la fuerza resultante que actúa en los puntos A, B, C, D y E en un camino de ida y en un camino de vuelta (se desprecia el rozamiento).



5- a) Hallar la aceleración de un esquiador que se desliza por la ladera de una colina inclinada 30° con la horizontal, con rozamiento despreciable.

b) ¿Cuál será la inclinación de la pista, cuando su aceleración sea 8 m/s²?

6- Hay seis proyectiles que se mueven en el vacío, es decir despreciando el rozamiento con el aire, como se muestra en la figura. A una misma altura, sus velocidades son las indicadas. Hacer un diagrama de cuerpo libre para cada caso y compararlos.

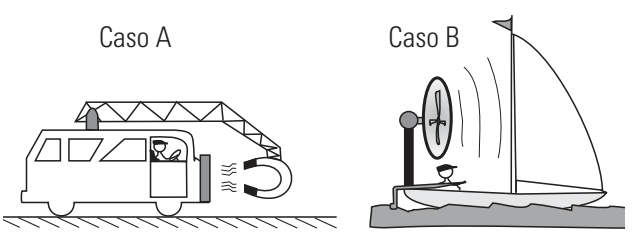


7- Una persona cuya masa es de 60 kg se encuentra en un ascensor. Determinar la fuerza que ejerce el piso sobre la persona cuando el ascensor:

a) sube con movimiento uniforme,
b) baja con movimiento uniforme,
c) sube acelerando con una aceleración de 3 m/s²,
d) baja acelerando con una aceleración de 3 m/s²,
e) baja frenando con una aceleración de 3 m/s²,
f) sube frenando con una aceleración de 3 m/s²,
g) cuando se rompen los cables del ascensor...

8- Analizar y comentar el párrafo siguiente: " ... siendo así que a toda "acción" se opone una "reacción", ¿cómo se puede explicar que podamos empezar a mover un cuerpo empujándolo, si ambas fuerzas se anulan entre sí?".

9- Comentar y discutir el funcionamiento de los móviles del dibujo:



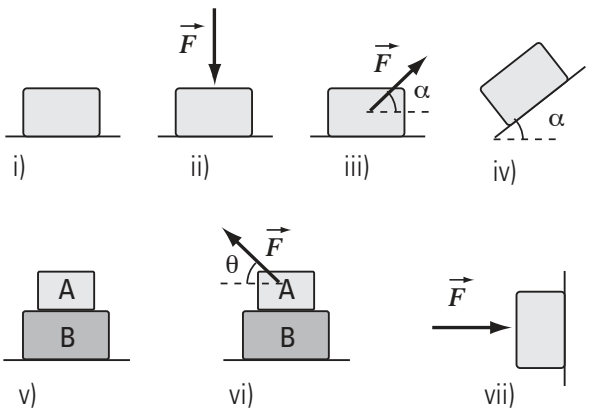
10- Considerar los sistemas i) a vii) ilustrados en la figura. En todos los casos se desprecian todos los rozamientos. Sabiendo que los cuerpos están siempre en contacto con la superficie sobre la cual están apoyados y tomando como datos las masas, los ángulos α y θ, y la fuerza externa $\vec{F}$:

a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo.

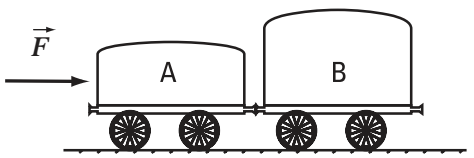
b) Explicitar los pares acción / reacción para cada una de las fuerzas actuantes.

c) Calcular la fuerza que ejerce sobre cada cuerpo la superficie sobre la cual está apoyado.

d) Calcular para cada caso el vector aceleración de cada cuerpo.



11- Dos carretones, A y B, cuyas masas m_A y m_B son distintas, se encuentran uno junto al otro apoyados sobre un piso horizontal que presenta rozamiento despreciable. Sobre el carretón A se aplica una fuerza horizontal externa $\vec{F}$, de módulo $|\vec{F}|$ y el sentido mostrado en la figura. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?



a) Si la masa de B es cero, el módulo de la fuerza de contacto entre los carritos es igual a $|\vec{F}|$.

b) Si las masas fueran iguales, la fuerza de contacto, en módulo, sería igual a la mitad de $|\vec{F}|$.

c) Si la masa de A es cero, el módulo de la fuerza de contacto entre los carritos es igual a $|\vec{F}|$.

d) El módulo de la fuerza de contacto entre carritos puede superar el valor de $|\vec{F}|$.

e) Si ahora $\vec{F}$ se aplica sobre el carretón B, el módulo de la fuerza de contacto no cambia.

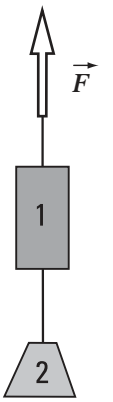
f) Si se suprime $\vec{F}$ la fuerza de contacto entre los carritos es nula.

- ☐ a, d, f
- ☐ a, c, e
- ☐ c, e
- ☐ b, c, f
- ☐ b, d, f
- ☐ b, e, f

12- Dos cuerpos de masa m_1 = 5 kg y m_2 = 3 kg están vinculados entre sí a través de una soga de masa m_s = 5 g, pequeña comparada con m_1 y m_2. Se desprecia el rozamiento entre los cuerpos y el aire. Se tira del cuerpo 1 con una fuerza cuyo módulo es $|\vec{F}|$ = 1000 N.

a) Realizar el diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo y para la soga.

b) Indicar cuáles son los pares de acción-reacción.



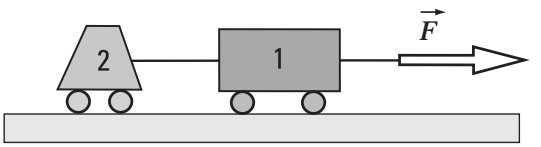
c) Si la soga es inextensible (la distancia entre todo par de puntos pertenecientes a ella permanece constante), calcular la velocidad y la aceleración de cualquier punto de la soga, y la velocidad y la aceleración de los cuerpos, sabiendo que en t = 0 s, la v = 0 m/s.

d) Para cada cuerpo, determinar el valor de cada una de las fuerzas actuantes y el de la fuerza neta o resultante.

e) Si $m_s \to 0$, ¿qué sucede con la fuerza que la soga ejerce sobre cada cuerpo?

> Nuestras sogas tendrán de ahora en adelante características especiales: serán hilos muy delgados de masa pequeña (despreciable) e inextensibles, y las denominaremos *sogas ideales*.

13- Para el sistema del ejercicio anterior, resolver los ítems a) al d) para el caso en el que los cuerpos están apoyados sobre una mesa horizontal sin rozamiento, unidos por una soga ideal.



14- Un joven de 80 kgf se encuentra quieto sobre la superficie libre de rozamiento de un lago congelado. El joven desplaza, desde el reposo, un paquete de 12 kg de masa tirando con una fuerza constante de 6 N mediante una soga ideal. Sabiendo que la separación inicial entre el paquete y el joven es de 15 m:

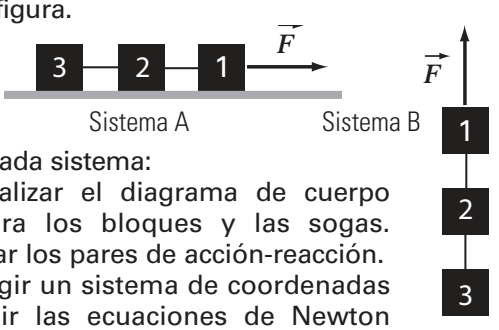
a) ¿Cuál es la aceleración del paquete?

b) ¿Cuál es la aceleración del joven?

c) Calcular a qué distancia de su posición inicial se halla el joven cuando finalmente se encuentra con el paquete.

15- En los sistemas A (horizontal) y B (vertical) de la figura, los bloques 1, 2 y 3 están vinculados entre sí por sogas ideales. Los bloques tienen igual masa m. Se desprecian todos los rozamientos.

Se aplica al bloque 1 una fuerza $\vec{F}$ como se indica en la figura.



Para cada sistema:

a) Realizar el diagrama de cuerpo libre para los bloques y las sogas. Identificar los pares de acción-reacción.

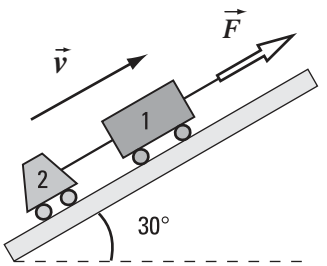
b) Elegir un sistema de coordenadas y escribir las ecuaciones de Newton para cada bloque.

c) Calcular la aceleración de cada uno.

d) Calcular la fuerza que transmite cada soga.

e) Calcular la fuerza resultante sobre cada bloque.

16- El sistema de la figura asciende por el plano inclinado 30°, que presenta rozamiento despreciable. Las masas de los cuerpos son m_1 = 60 kg, m_2 = 40 kg. Realizar los diagramas de cuerpo libre en cada caso, y determinar:



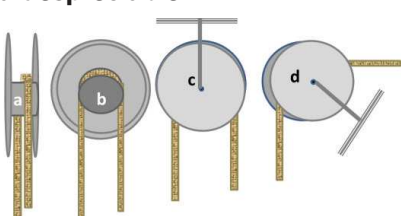
a) La intensidad de la fuerza $\vec{F}$ necesaria, para que el sistema se mueva con velocidad constante.

b) La intensidad de la fuerza que ejerce la soga, en ese caso.

c) La intensidad de $\vec{F}$ necesaria para que ambos cuerpos se aceleren hacia arriba a razón de 2 m/s^2, y la fuerza que transmite la soga en ese caso.

d) La fuerza que transmite la soga, la aceleración y el sentido del movimiento de cada cuerpo, un instante después de suprimir $\vec{F}$.

17- En las figuras (a), (b) y (c) se muestran distintas vistas de una polea sujeta al techo y en la (d), una polea sujeta a otra superficie. Básicamente, una polea consta dos discos de radio R unidos por un cilindro central de radio r << R. Sobre el cilindro se apoya una soga ideal. **Se supone que las poleas de la figura tienen masa despreciable**.

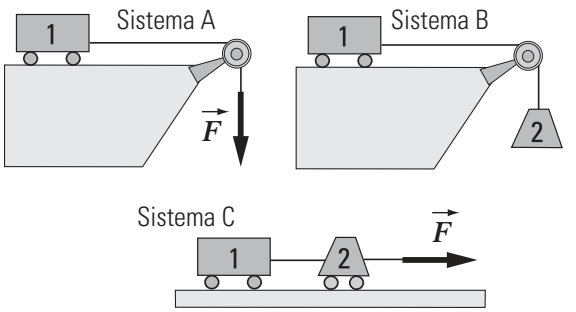


a) Realizar un diagrama de cuerpo libre para las poleas de las configuraciones (c) y (d).

b) ¿Qué fuerza ejerce un eje, que pasa por el centro de la polea, a través del cual se la puede sostener ya sea del techo o sujetarla a una superficie?

Nuestras poleas tendrán de ahora en adelante una característica especial: serán de masa despreciable y las denominaremos *poleas ideales*. La resultante de las fuerzas aplicadas sobre una polea ideal es nula. Cuando una soga ideal pasa por una polea ideal, la dirección de la tensión transmitida por la soga cambia pero no su intensidad.

18- Los tres sistemas que se proponen a continuación están compuestos por sogas y poleas ideales, además puede despreciarse el rozamiento con las superficies. La intensidad de la fuerza $\vec{F}$ aplicada es igual al peso del cuerpo 2.

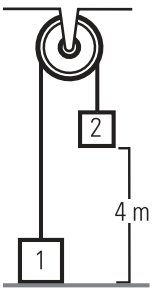


a) Comparando los sistemas A y B, analizar cualitativamente (sin hacer cálculos) cuál se mueve con mayor aceleración.

b) Repetir el análisis anterior, comparando ahora B con C.

c) Suponiendo ahora que la intensidad de la fuerza $\vec{F}$ es 5 kgf, y que la masa del cuerpo 1 es 20 kg, calcular las respectivas aceleraciones y verificar las predicciones hechas anteriormente.

19- Considerar el sistema de la figura, formado por dos bloques unidos por una soga ideal que pasa por una polea también ideal. Se deja libre al sistema desde el reposo, con el bloque 1 a nivel del piso, y el bloque 2 a 4 m de altura. El bloque 2, cuya masa es 6 kg, tarda 2 s en llegar al piso. Con esa información:



a) Hallar la masa del bloque 1.

b) Hallar con qué velocidad llegó al piso el bloque 2.

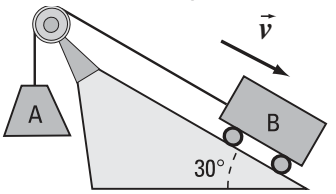
c) Hallar qué altura máxima sobre el piso alcanzará la base del bloque 1.

d) Hallar qué fuerza soporta el techo.

e) Graficar la intensidad de la fuerza que soporta la soga, en función del tiempo, hasta que comienza a subir el bloque 2.

f) Graficar la aceleración del bloque 1 en función del tiempo, en el mismo intervalo.

20- En el esquema de la figura los bloques A y B, de masas de 60 kg y 40 kg respectivamente, se mueven en el sentido indicado. Los bloques se encuentran vinculados por una soga ideal que pasa por una polea también ideal. Puede despreciarse el rozamiento sobre el plano inclinado.



a) En las condiciones dadas, hallar la intensidad y sentido de la aceleración de los bloques, y la fuerza que soporta la soga.

b) Se corta la soga en la situación planteada en la figura. Calcular la nueva aceleración de cada uno.

c) Describir el movimiento de cada bloque desde el instante inicial hasta que lleguan al piso. Esbozar los gráficos posición-tiempo.

21- En el sistema de la figura, asumiendo que se conocen los valores de las masas m_A, m_B y m_C, considerando que tanto la soga como la polea son ideales, y despreciando el rozamiento con la superficie, hallar las expresiones de:

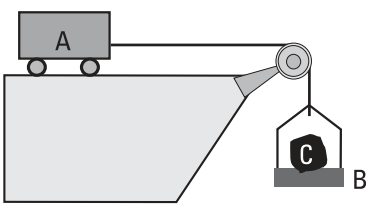
a) La aceleración de A.

b) La fuerza que transmite la cuerda.

c) La fuerza de contacto entre B y C.

d) Explicar por qué sobre A actúa horizontalmente una fuerza cuya intensidad es menor que la suma de los pesos de B y de C.

e) Si $m_B + m_C >> m_A$, analizar y tratar de predecir, sin hacer cálculos, la aceleración del sistema.

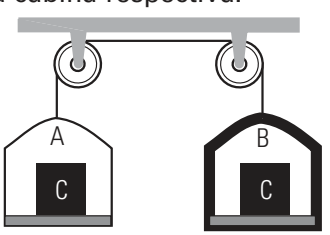


22- En el sistema de la figura, la masa de la cabina A es m_A = 200 kg y la de la cabina B es m_B = 300 kg. Dentro de cada una hay un cuerpo C de masa m_C = 50 kg. Asumiendo que la soga y las poleas son ideales, calcular:

a) La aceleración con que se mueve el sistema.

b) La tensión que transmite la soga.

c) La fuerza de contacto entre cada una de los cuerpos y la cabina respectiva.



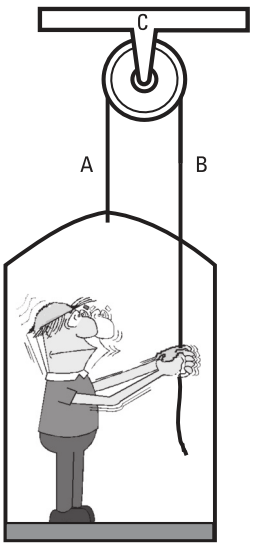
23- Un albañil se eleva en una plataforma como la que se muestra en el esquema, con una aceleración constante hacia arriba de 0,5 m/s².

Asumiendo que la soga y la polea son ideales, que la plataforma pesa 40 kgf, y que el albañil pesa 80 kgf:

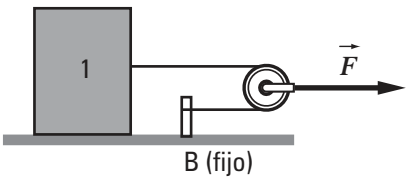
a) Realizar un diagrama de fuerzas para el albañil, la plataforma y la polea.

b) Determinar las intensidades de las fuerzas en los puntos A, B y C.

c) Hallar la fuerza que los zapatos del albañil ejercen sobre la plataforma.

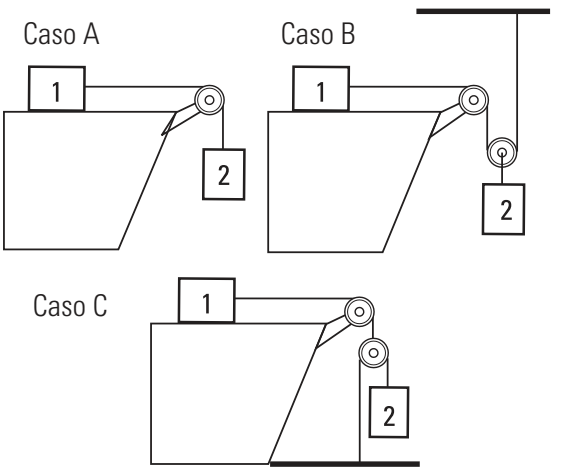


24- Calcular la aceleración del cuerpo 1 de masa m_1 = 4 kg, la tensión y aceleración de la polea. Considerar las sogas y la polea como ideales. Despreciar el rozamiento entre el cuerpo y la superficie. El módulo de la fuerza con la que se tira de la polea es de 20 N.



25- Calcular la aceleración de los cuerpos 1 y 2 y la tensión en las sogas en cada caso. Considerar las sogas y poleas como ideales, y despreciar el rozamiento entre el cuerpo 1 y la superficie horizontal.

Primero resolver algebraicamente y luego analizar el movimiento para m_1 = 4 kg y m_2 = 6 kg.



Fuerza de rozamiento

26- Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre un cuerpo y el suelo son 0,4 y 0,3, respectivamente. La masa del cuerpo es de 60 kg e inicialmente se encuentra en reposo apoyado sobre el suelo horizontal.

a) ¿Se lo puede mover aplicando una fuerza paralela al piso de módulo igual a 300 N?

b) En caso afirmativo, ¿cuál sería la aceleración del cuerpo?

27- El coeficiente de rozamiento dinámico entre las ruedas de un coche (cuando deslizan) y el suelo es 0,5.

a) Si el coche se mueve a una velocidad de 90 km/h y el conductor aprieta el freno a fondo, bloqueando las ruedas, ¿qué distancia recorre antes de detenerse si desliza en el pavimento?

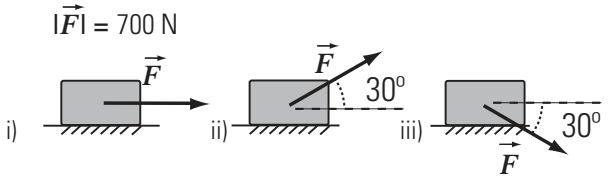
b) Si la velocidad inicial del coche se duplica, ¿se duplica también la distancia de frenado? ¿por qué?

28- Se lanza un bloque de hielo de 2 kg sobre una superficie horizontal con una velocidad de 16 m/s paralela al piso y recorre 80 m antes de detenerse.

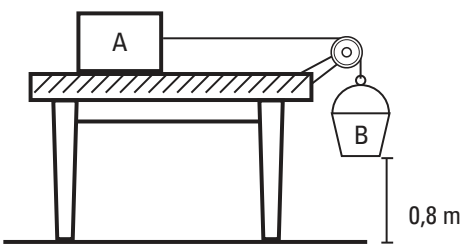
a) ¿Cuál es la aceleración del bloque?

b) Calcular el coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque y el piso.

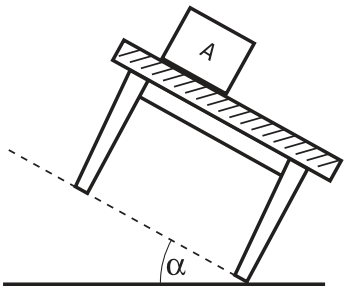
29- El coeficiente de rozamiento dinámico entre el suelo y el bloque de la figura es 0,4. Calcular el módulo de la aceleración en cada caso si el bloque se mueve hacia la derecha y tiene una masa de 100 kg.



30- Se realiza el experimento siguiente: se arma el sistema de la figura donde el bloque A de 2 kg se encuentra inicialmente en reposo sobre la mesa horizontal. Se va echando arena en el balde B, de modo que en cierto instante se rompe el equilibrio, y el sistema se acelera. Sabiendo que en B se ha totalizado una masa de 1,2 kg y que tarda 0,8 segundos en llegar al piso, hallar los coeficientes de rozamiento entre el bloque A y la mesa, asumiendo que la soga y la polea son ideales.



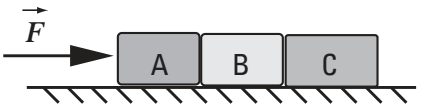
31- Considere la mesa y el bloque del ejercicio anterior. El bloque A se encuentra inicialmente en reposo sobre la mesa. Si se la inclina lentamente:



a) Hallar el máximo valor del ángulo que podrá formar con la horizontal, sin que A comience a moverse.

b) Si habiendo fijado ese ángulo se rompe el equilibrio, hallar con qué aceleración descenderá el bloque.

32- La figura muestra tres cuerpos iguales de masa m = 20 kg que están en contacto y apoyados sobre una superficie horizontal. Sobre el sistema actúa una fuerza horizontal de módulo $|\vec{F}|$.

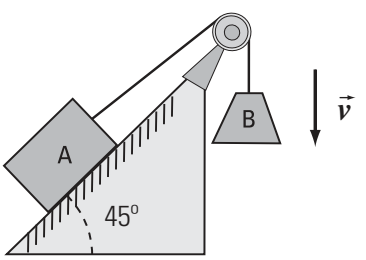


a) Suponer que no hay rozamiento entre los cuerpos y el piso, y que el módulo de la fuerza de contacto entre el cuerpo B y el cuerpo C vale 60 N. Calcular el módulo de la fuerza $\vec{F}$, de la aceleración del sistema, y de la fuerza de contacto entre los cuerpos A y B.

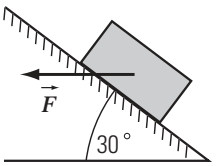
b) Suponer ahora que el coeficiente de rozamiento dinámico entre los cuerpos y el piso es 0,2. Calcular el valor de $|\vec{F}|$ para que el sistema se mueva hacia la derecha aumentando su velocidad con una aceleración de 2 m/s^2.

33- a) Calcular el peso del bloque B de la figura sabiendo que baja aumentando su velocidad con una aceleración de 0,5 m/s^2, y que el coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque A de 2 kg y el plano inclinado es de 0,1.

b) Calcular en las mismas condiciones del inciso a) la masa del cuerpo B si ahora baja disminuyendo su velocidad con una aceleración de 0,5 m/s^2.



34- Sobre un cuerpo de 2 kg que se encuentra sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal, actúa una fuerza $\vec{F}$ de dirección horizontal, tal y como se indica en la figura.



Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es despreciable:

a) ¿Qué fuerzas actúan sobre el cuerpo y cuáles son sus pares de acción-reacción?

b) ¿Cuánto tendrá que valer el módulo de la fuerza $\vec{F}$ para que el cuerpo ascienda por el plano inclinado con velocidad constante?

c) ¿Cuánto tendrá que valer $|\vec{F}|$ para que el cuerpo descienda con velocidad constante?

d) Ahora considerar que el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y el plano es $\mu_D = 0{,}3$. ¿Qué valor debe tener el módulo de $\vec{F}$ para que el cuerpo ascienda por el plano inclinado con velocidad constante?

e) Idem d) pero con el cuerpo descendiendo, por el plano, a velocidad constante.

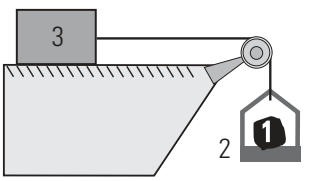
35- El cuerpo 1 de masa m_1 = 10 kg está dentro de una caja 2 de masa m_2 = 30 kg. El conjunto está atado a un tercer cuerpo de masa m_3 = 100 kg mediante una soga y una polea ideal.

Se deja al sistema en libertad, desde el reposo, y se observa que los cuerpos se desplazan 10 m durante los primeros 4 s. Calcular:

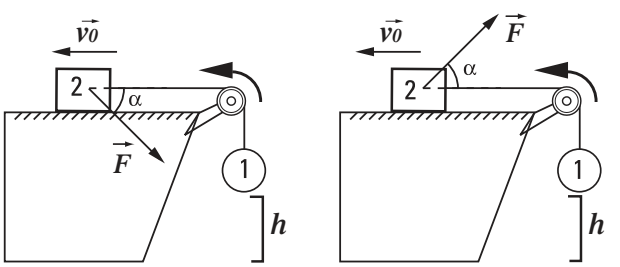
a) La aceleración del sistema y el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo 3 y la superficie horizontal.

b) La tensión de la cuerda.

c) La intensidad de la fuerza que el cuerpo 2 hace sobre el cuerpo 1.



36- Considerar las dos situaciones planteadas en la figura, casos A y B. Inicialmente, cuando el cuerpo 1 se encuentra a una distancia h del piso, se le imprime al cuerpo 2 una velocidad de módulo $|\vec{v_0}|$ hacia la izquierda.



Si la intensidad de la fuerza $\vec{F}$ es la misma en ambos casos ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?:

a) La tensión que ejerce la soga es la misma en ambos casos.

b) La fuerza de contacto entre el bloque 2 y el plano es mayor en el caso A que en el caso B.

c) Las fuerzas de rozamiento entre el bloque 2 y el plano para ambos casos son iguales.

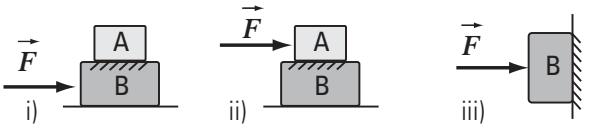
d) Ambos sistemas se mueven hacia la izquierda frenando.

e) En ambos casos la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque 2, debida a su interacción con el plano, tiene el sentido del movimiento.

f) El módulo de la aceleración del bloque 2 en el caso A es mayor que en caso B.

☐ a, d, f ☐ b, e, f ☐ a, c, e
☐ b, d, f ☐ c, e ☐ b, e, f

37- En los tres esquemas a continuación, las masas de los cuerpos y la fuerza externa $\vec{F}$ son datos del problema. Hay rozamiento solo entre los bloques A y B (figuras i e ii) y entre el bloque B y la pared (iii).



a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo.

b) Explicitar los pares acción-reacción para cada una de las fuerzas actuantes.

c) Calcular la fuerza normal que ejerce sobre cada cuerpo la superficie sobre la cual está apoyado.

d) El coeficientes de rozamiento estático entre los bloques A y B (i e ii), y entre el bloque y la pared (iii) es 0,2 y en ambos casos el de rozamiento dinámico es 0,1. Si m_A = 2 kg y m_B = 5 kg y el módulo de $\vec{F}$ es tal que no produce deslizamiento entre bloques (o entre el bloque y la pared), calcular la fuerza de rozamiento en cada caso.

e) Para el caso i) ¿cuál es valor de la fuerza $\vec{F}$ máxima que puede aplicarse al bloque B para arrastrar a los dos cuerpos sin que deslice un bloque sobre el otro y cuál es la aceleración del sistema cuando se aplica dicha fuerza?

f) Ídem e) para el caso ii), si ahora es el bloque A el que arrastra al sistema.

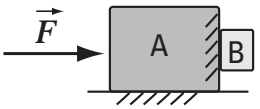
g) Para el último caso, iii), ¿cuál es la fuerza mínima que hay que aplicar al bloque que se halla contra la pared para evitar que deslice?

h) Suponer que los cuerpos (A y B) deslizan entre sí (o que el cuerpo B desliza sobre la pared), ¿cuál es la aceleración de cada uno de los cuerpos en cada caso? Expresar el resultado en función de $|\vec{F}|$. En los casos i) e ii) suponer que $|\vec{F}|$ es mayor que el hallado en e) y f). En el caso iii) suponer que $|\vec{F}|$ es menor que el hallado en g).

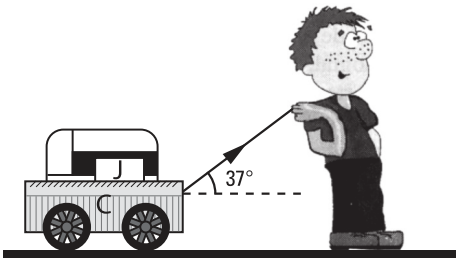
38- Entre los bloques A y B de la figura hay rozamiento, así como también entre el bloque A y el piso. En ambos casos el coeficiente de rozamiento estático es 0,4 y el coeficiente dinámico es 0,2.

Si el conjunto de bloques se mueve hacia la derecha, calcular el mínimo valor que debe tener $\vec{F}$ para que el bloque B no caiga.

Datos: m_A = 5 kg y m_B = 1 kg



39- Nicolás tira de su carrito con la caja de sus juguetes encima, aplicándole una fuerza de 30 N como se muestra en la figura.

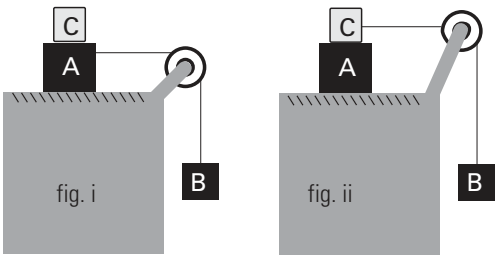


El carrito tiene una masa de 10 kg y la caja de 2 kg. Despreciar el rozamiento del carrito contra el piso y asumir que la caja y el carrito no deslizan entre sí, hallar:

a- La aceleración del conjunto.

b- El mínimo valor del coeficiente de rozamiento (¿cuál?) entre la caja y el carrito, para que no deslice sobre el mismo.

40- Las masas de los cuerpos A y B en las figuras son 10 kg y 4 kg, respectivamente. El coeficiente de rozamiento estático entre A y la mesa es de 0,2. No hay rozamiento entre el cuerpo A y el C.



a) Hallar para cada caso la mínima masa de C que evitará que A se mueva.

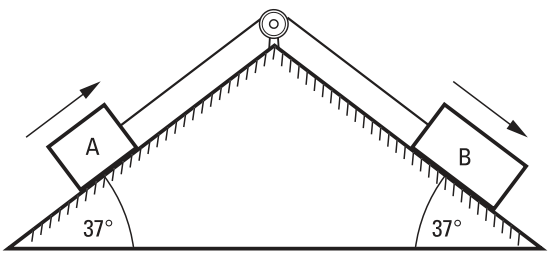
b) Si en (i) se retira C y el coeficiente entre A y la mesa es μ_d = 0,1; ¿cuál es la aceleración del sistema?

c) Hallar la velocidad relativa de A respecto de B después de 0,5 s de retirado el cuerpo C (caso i), tome un sistema de coordenadas cuyo eje horizontal (x) apunte a la derecha y el vertical (y) hacia arriba.

d) Si hay rozamiento ente A y C, ¿qué coeficiente de rozamiento es necesario entre el cuerpo A y C para que los cuerpos de la situación (ii) permanezcan en equilibrio? Considerar que el valor de la masa de C es el calculado en a) i).

e)¿Qué pasaría, en el caso (ii), si el coeficiente de rozamiento estático entre A y C y entre A y la mesa valiera 0,2? Tomar μ_d = 0,1 para ambas superficies. Considerar que el valor de la masa de C es el calculado en a) i). ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento entre A y el piso y entre A y C?

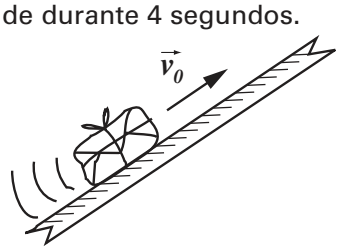
41- Los bloques A, de 200 kg, y B, de 300 kg, del esquema de la figura se mueven inicialmente en el sentido indicado, vinculados entre sí por una soga ideal que pasa por una polea también ideal. Existe rozamiento entre los bloques y los planos inclinados, y los coeficientes respectivos son μ_{dA} = 0,3 y μ_{dB} = 0,1.



a) Determinar el módulo y el sentido de la aceleración que experimentan en ese instante, y la intensidad de la fuerza que soporta la soga.

b) Con el sistema moviéndose, se corta la soga. Determinar la nueva aceleración que experimenta cada cuerpo, y describir en forma cualitativa su movimiento.

42- Se lanza un paquete hacia arriba, con una velocidad de 3 m/s, por un tablón inclinado con rozamiento no despreciable. El paquete sube en línea recta hasta detenerse, y regresa luego al punto de partida. Asciende durante 2 segundos, y desciende durante 4 segundos.



Calcular:

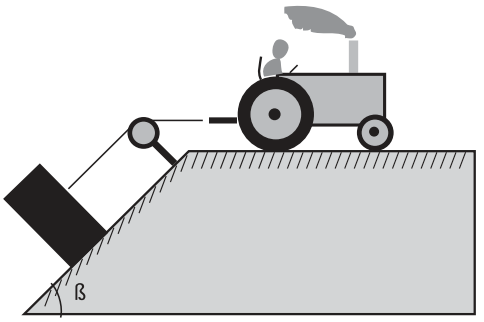
a) La aceleración que actúa en el ascenso, y la distancia que recorre sobre el plano, hasta detenerse.

b) Con qué aceleración desciende, y la velocidad con que llega al lugar de partida.

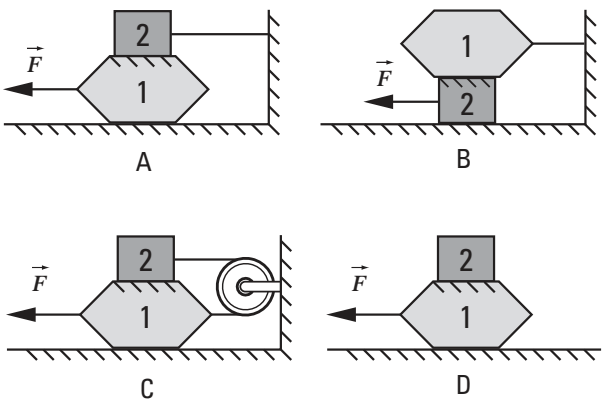
c) Sabiendo que la masa del paquete es de 20 kg, determinar la intensidad de la fuerza de rozamiento contra el plano, mientras está en movimiento. Hallar el ángulo de inclinación del plano y el coeficiente de rozamiento dinámico respectivo.

43- Un tractor puede subir o bajar un bloque de masa m como indica la figura. ¿Cuál es la fuerza máxima y mínima que puede hacer el tractor sin que la caja deslice sobre el plano?

Datos: $\beta = 30°$ $\mu_e = 0,5$ $\mu_d = 0,4$

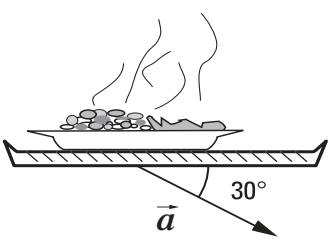


44- Para los diagramas mostrados, hallar la intensidad máxima que podrá tener la fuerza $\vec{F}$ antes que algún bloque se mueva, y la aceleración que adquieren una vez iniciado el movimiento, si se mantiene aplicada $\vec{F}$ con la intensidad calculada. Las masas son $m_1 = 30$ kg y $m_2 = 20$ kg, y los coeficientes de rozamiento entre bloques y con el piso son $\mu_e = 0,6$; $\mu_d = 0,25$.



45- Un plato cuya masa es m, viaja sobre la bandeja del mozo del bar.

La bandeja se acelera a 2 m/s² en la dirección indicada, manteniéndose horizontal. Hallar el mínimo coeficiente de rozamiento necesario para que el plato no deslice sobre la bandeja.



46- Dos bloques, que pesan 8 kgf y 80 kgf respectivamente, están unidos por una barra de masa despreciable y deslizan hacia abajo sobre un plano inclinado 30° respecto de la horizontal. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque de menos masa y el plano es 0,25 y el correspondiente al otro bloque es 0,5.

a) i) Calcular la aceleración y la tensión en la barra.

ii) ¿La barra está comprimida o traccionada? ¿Depende el resultado de la ubicación relativa de los bloques?

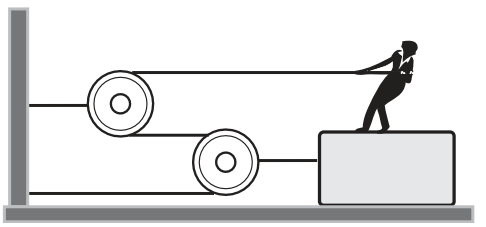
b) i) ¿Cuál sería la aceleración y la tensión en la barra si los bloques intercambiaran los coeficientes de rozamiento?

ii) ¿A qué tipo de fuerza estaría sometida la barra en este caso?

c) Si el coeficiente de rozamiento entre cada bloque y el plano es el mismo, calcular la aceleración y la tensión en la barra. ¿Dependen estos resultados de la ubicación relativa de los bloques?

d) Habiendo analizado todos los casos, ¿de qué depende que la barra esté comprimida o traccionada? Indicar que sucedería en cada caso, si la barra fuera reemplazada por una soga.

47- (Opcional) Un mujer de masa m_M está parada sobre un bloque de masa $m_B = 3\ m_M$. Entre ellos el coeficiente de rozamiento es μ. El bloque está sobre un piso horizontal sin rozamiento. La mujer está tomada de una soga ideal y las poleas también son ideales.



a) Realizar el diagrama de cuerpo libre para la mujer, el bloque y las poleas e indicar las fuerzas exteriores e interiores para el sistema formado solo por la mujer y el bloque.

b) Calcular, justificando cada paso, la aceleración máxima del bloque para que la mujer no deslice sobre él.

48- (Opcional) Una roca de masa 3 kg cae desde el reposo en un medio viscoso. Sobre ella actúan la fuerza $\vec{F}_1$ constante de 20 N (combinación de la fuerza gravitatoria y de la fuerza de flotación ejercida por el medio) y también la fuerza de resistencia del fluido, $\vec{F} = -k \cdot \vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad en m/s y k = 2 N s/m. Calcular:

a) La aceleración inicial.

b) La aceleración cuando $|\vec{v}| = 3$ m/s.

c) La velocidad terminal.

d) La posición, velocidad y aceleración luego de 2 s después de iniciado el movimiento.

Dinámica del movimiento circular

49- ¿Es posible que la velocidad de un cuerpo esté dirigida hacia el Este y la fuerza que actúa sobre él hacia el Norte? Dar un ejemplo.

50- Un cuerpo de 250 g gira en un plano horizontal con velocidad de módulo constante de 4 m/s. Si el radio de giro mide 80 cm, calcular:

a) El período τ del movimiento.

b) El módulo de la aceleración centrípeta.

c) El módulo de la fuerza resultante. Indicar su dirección y sentido.

51- Una piedra de 0,9 kg se ata a una cuerda de 0,8 m. La cuerda se rompe si su tensión excede los 450 N (ésta es la *resistencia a la rotura* de la cuerda). La piedra gira en un círculo horizontal sobre una mesa sin rozamiento; el otro extremo de la cuerda se encuentra fijo. Calcular la máxima rapidez que puede alcanzar la piedra sin romper la cuerda.

52- Una bola de 1kg de masa está atada a una cuerda de 0,45 m de longitud, gira describiendo una circunferencia en el plano vertical. Calcular:

a) La mínima velocidad que puede tener la bola en la posición más alta de la trayectoria.

b) ¿En qué punto de la trayectoria la velocidad es máxima?

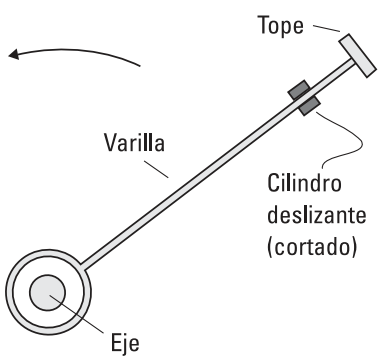
c) El máximo valor que puede adquirir la velocidad si la máxima tensión que puede soportar la soga es de 30N.

53- La varilla de la figura se hace girar con velocidad constante en un plano vertical. La misma tiene un tope a 90 cm del eje, y por ella desliza un cilindro pequeño, de 200 g. Puede despreciarse la masa de la varilla y el rozamiento sobre el cilindro.

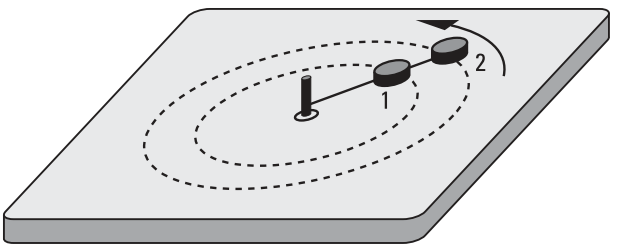
a) Si realiza una vuelta por segundo, calcular la intensidad de la fuerza que el tope hace sobre el cilindro, en los puntos más alto y más bajo de la trayectoria, respectivamente.

b) Hallar cuál será la máxima velocidad que puede dársele, si la varilla soporta una fuerza de tracción máxima de 20 Newton.

c) Hallar la mínima velocidad con que podrá girar, sin que el cilindro se separe del tope.



54- Dos bloques de masas m_1 = 2 kg y m_2 = 3 kg unidos por una cuerda inextensible giran en un plano horizontal con la misma velocidad angular (ω). Los bloques describen dos trayectorias circulares concéntricas de radios r_1 = 30 cm y r_2 = 50 cm, respectivamente.

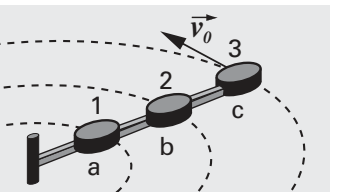


Sabiendo que el módulo de la tensión que ejerce la cuerda que une el centro de las trayectorias con el bloque de masa m_1 es de 40 N, calcular:

a) La intensidad de la tensión que ejerce la cuerda que une ambos bloques.

b) La velocidad angular.

55- El sistema de la figura está compuesto por tres cuerpos de igual masa unidos por tres varillas **a**, **b** y **c** de igual longitud y de masa despreciable. En todo instante los tres cuerpos se mantienen alineados girando en un plano horizontal. Se desprecian los rozamientos.



Considerar el instante en el que el módulo de la velocidad del cuerpo 3 es $|\vec{v}_0|$. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

a) Los tres cuerpos tienen la misma velocidad.

b) Los tres cuerpos tienen la misma velocidad angular.

c) Las fuerzas ejercidas por cada varilla, **a**, **b** y **c**, tienen igual módulo.

d) El módulo de la fuerza ejercida por la varilla **a** es mayor que el de la ejercida por la **b**.

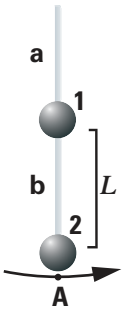
e) La velocidad angular del cuerpo 1 es menor que la del cuerpo 2.

f) El módulo de la aceleración centrípeta del cuerpo 1 es menor que el del cuerpo 2.

g) El módulo de la aceleración centrípeta del cuerpo 3 es menor que el del cuerpo 2.

- ☐ a, b, c
- ☐ b, d, f
- ☐ a, c, e
- ☐ b, c, g
- ☐ c, e, f
- ☐ a, d, f

56- El sistema de la figura está compuesto por dos cuerpos 1 y 2 de masas $m_1 = m_2$. Ambos se encuentran unidos por dos varillas **a** y **b** de igual longitud (L) y de masas despreciables que en todo instante se mantienen alineadas. El sistema gira en el plano vertical. No hay rozamientos. Considerar el instante en el cual el sistema pasa por la posición A (ver figura), en el cual el módulo de la velocidad de m_2 es de 2 m/s.



Datos: L = 0,5 m; $|\vec{v}_{2A}|$ = 2 m/s; $m_1 = m_2$ = 0,5 kg.

Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

a) El módulo de la velocidad del cuerpo 1 es 2 m/s.

b) Los módulos de las fuerzas ejercidas por cada varilla son iguales.

c) El módulo de la fuerza ejercida por la varilla **a** es 2,6 veces mayor que el peso del cuerpo 1.

d) La velocidad angular del cuerpo 1 es 2 rad/s.

e) La aceleración centrípeta del cuerpo 2 es el doble de la de 1.

f) El módulo de la fuerza ejercida por la varilla **b** es 2 veces mayor que el peso del cuerpo 2.

☐ a, b, c ☐ a, c, e
☐ c, d, e ☐ b, c, f
☐ c, e, f ☐ a, d, f

57- Un automóvil de 1200 kg de masa toma una curva de 30 m de radio con una velocidad de módulo 90 km/h. Calcular la fuerza centrípeta. ¿Qué interacción es responsable del giro del auto?

58- La rapidez máxima con la que un coche de 1000 kg de masa puede tomar una curva sobre una ruta horizontal sin *peralte* de 150 m de radio es de 20 m/s. (El *peralte* es la inclinación en la curva que permite realizar giros a mayor velocidad sin correr el riesgo de salirse de la pista). Calcular:

a) La fuerza de rozamiento entre las ruedas y el asfalto cuando la rapidez es máxima.

b) El valor del coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el asfalto.

59- Una curva de autopista de 300 m de radio no tiene peralte. Un camión cuyo peso es de 14000 kgf transita la autopista. El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y el asfalto seco es de 0,75, en el asfalto mojado es de 0,50 y en el hielo es de 0,25.

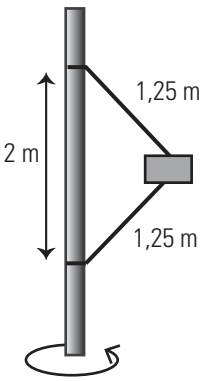
a) Determinar la máxima rapidez con la que se puede pasar la curva con toda seguridad (sin deslizar) en: (i) días secos, (ii) días lluviosos y (iii) días helados. ¿Esos valores de velocidad dependen de la masa del vehículo?

b) Suponer que no hay rozamiento. Con las velocidades calculadas en a), calcular, en cada caso, el ángulo del peralte para que el vehículo se mantenga sin salirse de la curva.

¿El valor del ángulo de peralte dependen de la masa del vehículo?

c) Recalcular las velocidades halladas en a), si la autopista tiene un peralte de 3°. ¿Esos valores de velocidad dependen de la masa del vehículo?

60- El bloque de 4 kg de la figura está unido a una varilla vertical con dos sogas ideales iguales de 1,25 m de longitud. Cuando el sistema gira sobre el eje de la varilla, las sogas se extienden.



a) Si la tensión de la soga superior es de 70N, ¿qué tensión ejerce la soga inferior? ¿con qué frecuencia en RPM, debería girar el bloque en esas condiciones?

b) Si ahora el bloque gira manteniendo el mismo ángulo que en el inciso anterior, que frecuencia sería necesaria para que la tensión de la soga inferior sea nula.

c) Explicar cómo se movería el bloque si la frecuencia fuera menor que la calculada en el ítem anterior.

61- Una partícula de masa m, atada a una cuerda ideal de 4,5 m de longitud, gira de modo que la cuerda forma un ángulo θ constante con la vertical (péndulo cónico), como muestra la figura.

Despreciando toda clase de rozamiento,

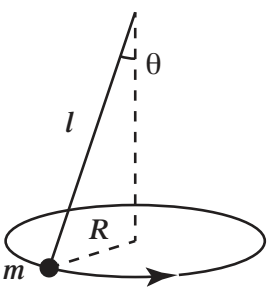
a) ¿Qué tipo de movimiento realiza la partícula?

b) Si θ = 30°, ¿cuánto vale la velocidad angular de la partícula? ¿Depende este valor de su masa?

c) Si m = 5 kg, calcular la tensión que ejerce la cuerda.

d) ¿Cómo variarían el ángulo θ y la tensión de la cuerda si la partícula girara con una velocidad angular mayor que la calculada en b)?

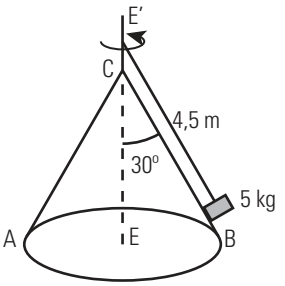
e) La partícula, ¿podría permanecer girando con la cuerda horizontal? Justifique.



62- Un cuerpo de 5 kg, apoyado sobre la superficie cónica ABC, pende de una soga ideal de 4,5 m de longitud (ver figura).

El cuerpo gira alrededor del eje EE' a 10 rpm. No hay rozamiento entre la superficie y el cuerpo.

Calcular:



a) La fuerza que ejerce la superficie cónica sobre el cuerpo.

b) La tensión en la soga.

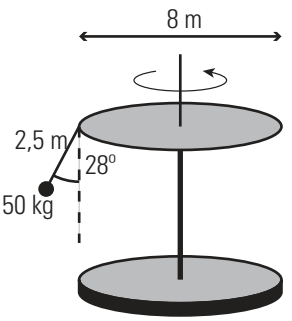
c) La velocidad angular a la que ha de girar el cuerpo para anular la fuerza de contacto con la superficie cónica.

¿Cuánto vale la tensión de la soga en este caso? Comparar éstos resultados con los del ejercicio 61.

d) Describir qué sucedería si el cuerpo girase con una velocidad angular mayor que la calculada en c) ¿Y si lo hiciera con una velocidad angular menor?

63- El tambor de eje vertical de una lavadora industrial es un cilindro de 40 cm de diámetro, y la frecuencia máxima de centrifugado es de 1200 rpm. Calcular la fuerza neta a la que está sometida una masa de 2 kg de ropa ubicada en la periferia y que no desliza sobre la pared del lavarropa.

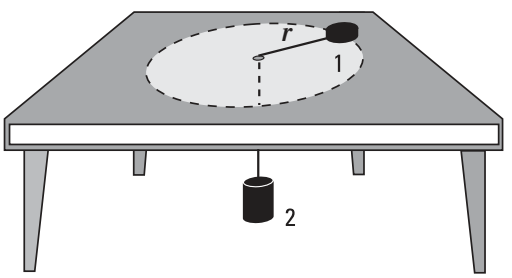
64- Un juego de un parque de atracciones consta de una plataforma circular de 8 m de diámetro que gira. De la plataforma cuelgan "sillas voladoras" suspendidas de cadenas de 2,5 m de longitud. Cuando la plataforma gira, las cadenas que sostienen los asientos forman un ángulo de 28º con la vertical.



a) ¿Cuál es la velocidad angular de las sillas?

b) Si un niño ocupa una silla y la masa del conjunto silla-niño es de 50 kg, ¿cuál es la tensión que ejerce la cadena?

65- Un cuerpo 1 de masa m_1 se encuentra apoyado sobre una mesa horizontal sin rozamiento.



Datos: $m_1 = 1$ kg $\quad m_2 = 4$ kg $\quad r = 0{,}1$ m

El cuerpo 1 está unido a un cuerpo 2 de masa m_2 colgado mediante una cuerda ideal que pasa por un agujero practicado en la mesa.

El cuerpo 2 permanece en reposo, mientras que el 1 describe un movimiento circular uniforme de radio r.

a) Realizar los diagramas de cuerpo libre. Especificar los pares de acción-reacción.

b) Calcular el módulo de la velocidad con la que gira el cuerpo que se encuentra sobre la mesa. ¿Cuánto valen la intensidad de su aceleración tangencial y la de su aceleración centrípeta?

66- Responder verdadero o falso, justificando las respuestas.

a) Si una partícula recorre una trayectoria curvilínea, su aceleración es nula.

b) Siempre que un cuerpo tiene rapidez constante, su aceleración es nula.

c) Para que un cuerpo realice una trayectoria circular, la resultante debe necesariamente tener una componente en la dirección radial cuyo sentido es hacia el centro de la circunferencia que describe.

d) Si un auto avanza con velocidad constante de módulo $|\vec{v}|$, se necesita una fuerza neta menor para hacerle tomar una curva más abierta que una más cerrada.

e) En los puntos en que un péndulo simple alcanza su amplitud máxima (puntos de retorno), su aceleración es nula.

f) Cuando un péndulo simple oscila describe un movimiento circular uniforme.

g) Cuando un péndulo simple oscila, en la posición más baja de su recorrido la aceleración centrípeta es nula.

h) En un movimiento circular uniforme, con radio de giro constante, a mayor velocidad tangencial mayor aceleración centrípeta.

i) En un movimiento circular uniforme con velocidad angular constante, a mayor radio de giro, mayor aceleración centrípeta y mayor velocidad tangencial.

j) Un cuerpo atado a un piolín que se hace girar en un plano vertical siempre se mueve describiendo un movimiento circular uniforme.

k) Si a un cuerpo atado a una cuerda se lo hace girar en un plano horizontal con movimiento circular uniforme, al cortarse el piolín el cuerpo sale despedido radialmente.

l) En la posición más baja de un movimiento pendular el módulo de la tensión es igual al peso.

m) La fuerza centrípeta es la componente de la fuerza resultante en la dirección paralela al desplazamiento.

n) La fuerza centrípeta es la componente de la fuerza resultante en la dirección paralela a la aceleración centrípeta.

Interacción gravitatoria

Para la resolución de los ejercicios propuestos se dispone de la siguiente lista de valores:

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$

$R_{\text{Tierra}} = 6378$ km; $R_{\text{lunar}} = 1737$ km; $R_{\text{Sol}} \approx 7 \times 10^5$ km.

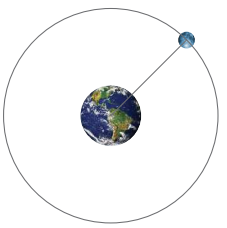
$m_{\text{Tierra}} = 6 \times 10^{24}$ kg; $m_{\text{Sol}} = 2 \times 10^{30}$ kg; $m_{\text{Luna}} = 7{,}38 \times 10^{22}$ kg.

$d_{\text{Tierra-Sol}} = 1{,}5 \times 10^8$ km; $d_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,000$ km;

67- Dos cuerpos de masas 800 kg y 500 kg se encuentran a 3 m de distancia. ¿Cuál es la intensidad de la fuerza de atracción gravitatoria que experimenta cada uno de los cuerpos?

68- Considerar el sistema Tierra-Luna de la figura, donde se desprecian las interacciones con los demás cuerpos del Sistema Solar.

a) Realizar un diagrama de cuerpo libre de la Luna y de la Tierra. Graficar los vectores aceleración y calcular sus módulos.



b) A partir de la información del inciso a), ¿podría usted afirmar que la Luna está cayendo sobre la Tierra o la Tierra sobre la Luna? Justificar la respuesta.

69- Calcular la masa del Sol, considerando que la Tierra describe una órbita circular de 150 millones de kilómetros de radio. ¿Cuál es el módulo de la velocidad con la cual la Tierra gira alrededor del Sol?

70- La Estación Espacial Internacional es un centro de investigación tripulado en órbita alrededor de la Tierra, cuya administración, gestión y desarrollo está a cargo de la cooperación internacional. Se encuentra a unos 408 km de altura de la superficie de la Tierra. Calcule el valor del período y el módulo de la velocidad con la cual gira alrededor de la Tierra.

71- Dos planetas describen órbitas circulares de radios R_A y R_B alrededor de una estrella. El período del planeta A es ocho veces mayor que el del planeta B. Si las velocidades angulares respectivas son ω_A y ω_B , diga cuál de las siguientes relaciones es la única correcta:

☐ $\omega_A = 8\ \omega_B$ y $R_A = 4R_B$ ☐ $\omega_A = 1/8\ \omega_B$ y $R_A = 4\ R_B$

☐ $\omega_A = 8\ \omega_B$ y $R_A = 1/4\ R_B$ ☐ $\omega_A = 1/8\ \omega_B$ y $R_A = 1/4\ R_B$

☐ $\omega_A = 1/4\ \omega_B$ y $R_A = 2{,}5\ R_B$

☐ las relaciones entre ω_A y ω_B y entre R_A y R_B dependen de las masas de los planetas

72- La Luna gira en torno a la Tierra, completando una revolución en aproximadamente 28 días. Suponiendo que la órbita fuera circular de radio $R_{TL} = 384000$ km, ¿cuál sería la magnitud de la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre la Luna?

73- La masa de la Luna es 1/81 de la masa de la Tierra y su radio es 1/4 del radio de la Tierra. Calcular cuánto pesará en la superficie de la Luna una persona que tiene una masa de 70 kg.

74- Hallar cuánto pesa un meteorito de 2 kg en el campo gravitatorio de la superficie de Marte. Hallar cuánto pesa Marte, en el campo gravitatorio del meteorito, en la misma posición anterior.

Datos: $m_{\text{Marte}} = 6{,}6 \times 10^{23}$ kg; $R_{\text{Marte}} = 3380$ km.

75- ¿A qué distancia del centro de la Tierra debe ubicarse un objeto de masa 1 kg para que pese 1 N? Expresar esa distancia como múltiplo del radio terrestre.

76- Un satélite artificial se dice que es geoestacionario si está siempre en la vertical de un cierto punto de la Tierra. ¿A qué altura se encuentran los satélites geoestacionarios?

77- Hallar a qué distancia entre la Luna y la Tierra debería colocarse un objeto, para que las fuerzas de atracción gravitatoria sobre el mismo se compensaran mutuamente. ¿Depende el resultado anterior de la masa del objeto? ¿Qué le ocurriría allí al objeto?

78- ¿A qué se debe que un astronauta en una nave espacial en órbita viva una situación de "ingravidez"? Si la altura de la órbita es de 400 km, ¿cuánto pesa en esas circunstancias un astronauta de 80 kg? Los astronautas suelen prepararse para experiencias como estas dentro de aviones que vuelan alto y se "tiran en picada". Explique el procedimiento.

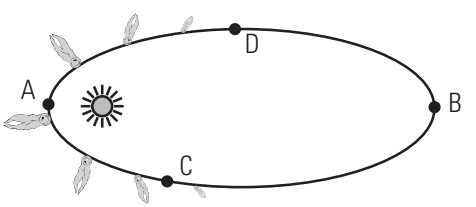
79- La imagen representa la trayectoria elíptica del cometa Halley en su movimiento alrededor del Sol (en sentido horario).

a) Representar el vector fuerza sobre el cometa en las posiciones A (perihelio), B (afelio), C y D.

b) Representar las componentes tangencial y normal (centrípeta) de la aceleración en dichos puntos. ¿Qué puede concluir acerca del módulo de la velocidad del cometa (respecto de un sistema fijo al Sol) en los puntos A y B?

c) En el punto A la distancia del cometa al Sol es 0,57 UA (1 UA = distancia Tierra-Sol) mientras que en B es 35,5 UA. Si la masa del cometa es de $2{,}2 \times 10^{14}$ kg; calcular la fuerza sobre el cometa y su aceleración en dichos puntos.

d) Investigar en qué año se producirá la próxima aparición del Halley. Estimar sus probabilidades de estar vivo para verlo y si la resolución de este problema incrementará o no sus deseos de hacerlo.



Fuerza elástica

Durante el presente curso consideraremos resortes cuyo comportamiento es perfectamente elástico, que cumplen con la Ley de Hooke y de masa pequeña frente a la de los cuerpos que desplaza.

80- Un resorte se alarga 30 cm cuando ejercemos sobre él una fuerza de 24 N de intensidad.
Calcular:
a) El valor de la constante elástica.
b) El alargamiento del resorte al aplicar una fuerza de 60 N.

81- Un resorte cuya constante elástica vale 150 N/m tiene una longitud de 35 cm cuando no se aplica ninguna fuerza sobre él.
Calcular:
a) La fuerza que debe ejercerse sobre el resorte para que su longitud sea de 45 cm.
b) La longitud del resorte cuando se aplica una fuerza de 63 N.

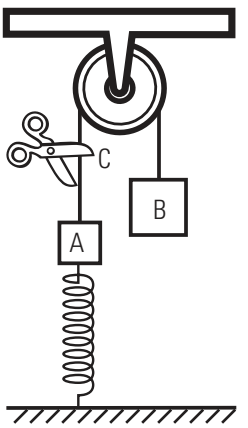
82- Un resorte alcanza una longitud de 35 cm si tiramos de él con una fuerza de 225 N. Si tiramos con una fuerza de 420 N, su longitud es de 48 cm. Calcular:
a) ¿Cuánto mide el resorte cuando no actúa fuerza alguna?
b) ¿Cuál es el valor de su constante elástica?

83- Un hombre está de pie sobre una balanza de resorte. De repente se pone en cuclillas.
¿Qué ocurre con la lectura de la balanza? ¿Y si el hombre estuviera inicialmente en cuclillas y se levantara repentinamente?

84- Sobre un dinamómetro de constante elástica k = 200 N/m se cuelga un cuerpo de 4 kg de masa. Calcular el alargamiento en equilibrio.

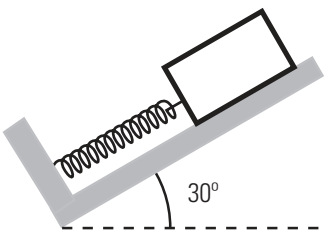
85- Un resorte de masa despreciable, cuya longitud es 40 cm cuando está descargado, tiene un extremo unido al techo a 2,4 m del piso, y en el otro está colgado un objeto que pesa 12 kgf.
a) Hallar la constante elástica del resorte, si al quedar en equilibrio su longitud es 60 cm.
b) Se eleva al cuerpo 5 cm desde la posición de equilibrio, y se lo suelta. Hallar con qué aceleración parte.
c) Determinar cuánto habría que desplazar el cuerpo hacia abajo, respecto de su posición de equilibrio, para que al soltarlo partiera con una aceleración de módulo igual a $|\vec{g}|$.
d) Si ahora se eleva al cuerpo 25 cm desde la posición de equilibrio, y se lo suelta. Hallar con que aceleración parte?
e) Trazar los gráficos de la aceleración del cuerpo y de la fuerza que experimenta el techo, en función de la distancia al piso del extremo libre.

86- En el sistema mostrado en la figura, un extremo del resorte está unido al cuerpo A, y el otro extremo al piso. Se pueden despreciar las masas del resorte, de la cuerda y de la polea, así como el rozamiento en la misma.



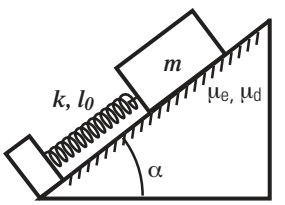
Determinar la intensidad de la fuerza que el resorte ejerce sobre A, y la que soporta el techo, para distintos valores de las masas, en equilibrio. Hallar también con qué aceleración comenzará a moverse el cuerpo A en cada caso, un instante después de cortar bruscamente la cuerda en el punto C.
a) m_A = 4 kg y m_B = 6 kg
b) m_A = 4 kg y m_B = 1 kg
c) $m_A = m_B$

87- Un resorte de constante elástica 400 N/m, reposa apoyado en un plano inclinado 30° con la horizontal. En el extremo superior del resorte se apoya un cuerpo de masa 5 kg.



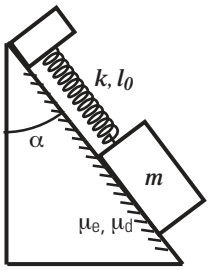
Suponiendo que no existe rozamiento, ¿cuánto se deforma el resorte si el cuerpo se encuentra en equilibrio?

88- Un bloque de masa m se coloca sobre un plano inclinado unido a un resorte de largo natural l_0 y constante elástica k. El plano inclinado forma un ángulo α con la horizontal. Datos: l_0 = 60 cm, k = 500 N/m,
m = 30 kg y α = 37°.
a) Suponiendo que no hay rozamiento, calcular la posición de equilibrio del bloque con respecto al extremo fijo del resorte.
b) Si ahora hay rozamiento, y los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre el bloque y el plano fueran μ_e = 0,4; μ_d = 0,15, respectivamente, hallar la máxima longitud que podrá darse al resorte y que el cuerpo permanezca en equilibrio.

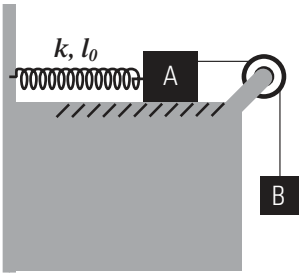


c) Con los mismos coeficientes anteriores, hallar la mínima longitud del resorte que conserve el equilibrio.

89- Ídem problema anterior, pero ahora el resorte está sujeto a la parte superior del plano inclinado. Comparar los resultados



90- Dos bloques, A y B, de masas m_A y m_B están unidos por una cuerda ideal que pasa por una polea ideal. El bloque A está unido a la pared mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_0.



a) Suponiendo rozamiento nulo entre el bloque A y el piso. Calcular la longitud del resorte cuando el sistema está en equilibrio. ¿Cuál es la fuerza que ejerce el resorte sobre la pared en este caso?

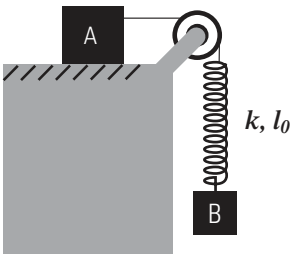
b) Considerar ahora que el sistema **no** está en equilibrio. Si la longitud del resorte es l_0 y se deja el sistema en libertad, calcular la aceleración inicial de cada bloque.

c) Considerar ahora que el rozamiento entre bloque A y el piso no es despreciable. Se desplaza al cuerpo que cuelga hacia abajo hasta que el resorte tenga una longitud l, mayor que l_0 y menor que la longitud calculada en a), y se lo suelta. Encontrar el valor mínimo que debe tener el coeficiente de rozamiento estático μ_e para que el sistema, al soltarlo, quede en equilibrio. ¿Depende este valor de la constante elástica del resorte?

91- Ídem ítems a) y b) del problema anterior, considerando la configuración del esquema.

c) Considerar ahora que hay rozamiento entre A y el piso. Encontrar el valor mínimo que debe tener el coeficiente de rozamiento estático, μ_e, para que el sistema esté en equilibrio.

Si el sistema se encuentra en equilibrio, ¿cuánto vale la longitud del resorte?



92- Dos resortes de masa despreciable, cuyas constantes elásticas son k_1 y k_2, son utilizados para mantener suspendido un objeto cuya masa es m. Para las dos configuraciones que se muestran en el esquema, determinar:

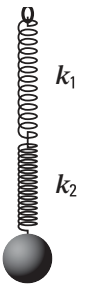
a- ¿Cuál de los dos resortes soporta una fuerza mayor?

b- ¿Cuál de los dos resortes se alarga más?

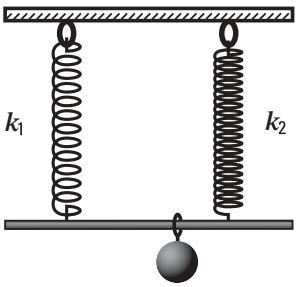
c- ¿Cuál es el valor de la constante elástica equivalente del sistema que forman ambos? (Se la define como la constante del resorte único, capaz de reemplazarlos produciendo los mismos efectos).

NOTA: En el caso B, la carga se distribuye de modo que la barra quede siempre horizontal.

Caso A **Resortes en serie**

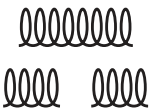


Caso B **Resortes en paralelo**

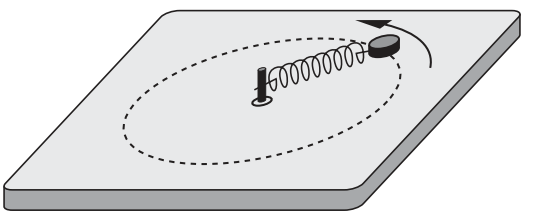


93- Un resorte se corta por la mitad como indica la figura. Si la constante elástica del resorte de arriba es k, ¿cuál es la constante de cada uno de los resortes de abajo? Justifique su elección.

- ☐ $4k$
- ☐ $2k$
- ☐ k
- ☐ $k/2$
- ☐ $k/4$



94- Un cuerpo de 5 kg se mueve apoyado en una mesa horizontal con rozamiento despreciable, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica 1000 N/m, cuya longitud sin carga es 20 cm.



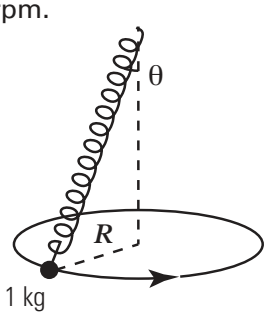
a) ¿Cuál es la longitud del resorte, cuando el cuerpo gira dando dos vueltas por segundo? Considerar que la trayectoria es una circunferencia y despreciar la masa del resorte.

b) Expresar la segunda ley de Newton para el caso general de una masa unida a un resorte de constante elástica k y cuya longitud relajado es l_0, cuando gira como se indica en la figura y con una velocidad angular ω. Despejar la longitud l en función de ω y encontrar el rango de valores posibles de ω para que gire con movimiento circular uniforme.

95- Se engancha una partícula de 1 kg a un resorte de masa despreciable de constante elástica 10 N/cm y longitud natural 48 cm. Se hace girar al cuerpo como un péndulo cónico con una frecuencia constante de 60 rpm.

a) Calcular el alargamiento del resorte respecto a su longitud natural.

b) Calcular el ángulo que forma la altura del cono con la generatriz.



Movimiento armónico simple

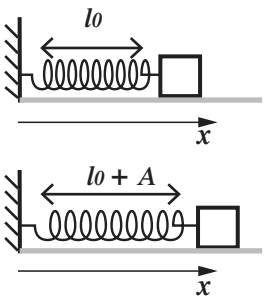
96- Un cuerpo de masa m sujeto a un resorte de constante k se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se desplaza al cuerpo de su posición de equilibrio una distancia A y se lo deja en libertad a partir del reposo.

a) ¿Qué tipo de movimiento efectúa el cuerpo? Escribir la ecuación de Newton y obtener $x(t)$. Calcular la frecuencia de oscilación (pulsación) y el período en función de k y m.

b) ¿En qué puntos la aceleración del cuerpo es nula y en cuáles es máxima?

c) ¿En qué puntos la velocidad es nula y en cuáles es máxima?

d) Graficar la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.



97- Un cuerpo de masa 0,75 kg se sujeta a un resorte horizontal de constante elástica de 48 N/m, cuyo otro extremo se encuentra fijo a una pared. Se estira el resorte separando el cuerpo 0,2 m a partir de la posición de equilibrio y se lo suelta apartir del reposo. El origen del sistema de referencia está en la posición de equilibrio y es positivo en el sentido en que se estira el resorte. Hallar:

a) El período de la oscilación.

b) La ecuación de movimiento.

c) ¿Cuánto tarda en pasar por segunda vez por la posición de equilibrio y con qué velocidad lo hace?

d) El instante en el que el móvil pasa por primera vez por la posición $x = -0{,}1$ m, después de haber pasado por el origen.

e) Los valores de la velocidad y de la aceleración del cuerpo para el instante calculado en d).

f) Graficar posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

98- Un cuerpo de masa m unido a un resorte horizontal de constante elástica k describe un movimiento oscilatorio armónico simple (M.A.S) de 20 cm de amplitud. En el instante $t = 0$ s el cuerpo pasa por la posición de equilibrio moviéndose en el sentido positivo del sistema de coordenadas con una velocidad de módulo 1 m/s.

a) Calcular la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

b) ¿En qué instantes el cuerpo pasa por el origen de coordenadas?

99- Considere una partícula de masa m suspendida del techo por medio de un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0. Determine cómo varía su posición en función del tiempo sabiendo que en $t = 0$ la partícula se halla a una distancia $2\,l_0$ del techo con velocidad nula. Considere que la distancia $2\,l_0$ es mayor a la longitud de equilibrio.

100- Un cuerpo de 300 g se encuentra en equilibrio unido al techo a través de un resorte. El peso del cuerpo hace que el resorte se estire 6 cm respecto de su longitud natural.

a) ¿Cuál será la frecuencia de oscilación o pulsación si se separa al cuerpo de su posición de equilibrio?

b) ¿Qué ocurriría al variar la masa a 500 g?

c) Determinar para este último caso el período y la frecuencia.

101- Un péndulo simple de longitud L oscila con amplitud A, pequeña.

Expresar, como función del tiempo:

a) Su desplazamiento angular.

b) Su velocidad angular.

c) Su aceleración angular.

d) Su velocidad tangencial.

e) Su aceleración centrípeta y su aceleración tangencial.

f) La tensión que ejerce la cuerda si la masa de la lenteja es m. ¿Para qué desplazamiento angular la tensión es máxima? Comparar con la intensidad de la fuerza peso.

102- Una partícula oscila con un movimiento armónico simple de tal forma que su desplazamiento varía de acuerdo con la expresión:

$x(t) = 5\text{ cm}\cos(2\text{ s}^{-1}t + \pi/6)$,
donde x se mide en cm y t en s.

Calcular:

a) El período y la amplitud del movimiento.

b) La posición, la velocidad y la aceleración en $t = 0$ s.

c) La intensidad máxima de la velocidad y de la aceleración.

103- Un cuerpo de 2 kg está unido a un resorte horizontal de constante $k = 5$ N/m. Se alarga 10 cm al resorte y se lo suelta a partir del reposo.

a) Hallar la frecuencia, el período y la amplitud del movimiento.

Escribir la ecuación del M.A.S.

b) ¿En qué instante pasa el cuerpo por primera vez por la posición de equilibrio?

c) La intensidad máxima de la velocidad y de la aceleración.

Sistemas no inerciales

104- Un colectivo parte del reposo con aceleración constante a. En su interior sobre el piso se encuentra un paquete de masa m. Considerar que **no** hay rozamiento entre este y el piso.

Con los conceptos de dinámica que posee:

a) Graficar cuáles son las fuerzas que actúan sobre el paquete. Indicar cuáles son y dónde están aplicados sus pares de interacción.

b) Escribir las ecuaciones de movimiento del paquete tomando como sistema de referencia, S, a uno fijo a la vereda (sistema inercial).

c) Plantear el problema ahora tomando como sistema de referencia, S', a uno fijo al colectivo (sistema no inercial). ¿Es compatible el comportamiento del paquete con las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de las leyes de Newton? ¿Qué fuerza resulta necesaria postular para "salvar" la validez de las leyes de Newton? ¿Dónde debe aplicar esta fuerza? ¿Existe una fuerza con la cual constituya un par acción-reacción?

105- Repetir el problema anterior (incisos a, b y c), sabiendo que el paquete no desliza respecto del piso y sabiendo que el coeficiente estático de rozamiento es μ_e.

d) Analice desde ambos sistemas cual es la máxima aceleración $a_{máx}$ que puede adquirir el colectivo para que el paquete no resbale.

e) Para aceleraciones del colectivo, $a > a_{máx}$, ¿cuánto vale el vector aceleración del paquete respecto de S y de S'? Tome μ_d como dato?

106- Un vagón de ferrocarril transporta una mesa de metal y sobre ella se sitúa una bola de billar. Si el vagón arranca avanzando, para una persona que esté dentro del mismo, la bola:

a) No se mueve
b) Se desplaza hacia atrás
c) Se desplazaría hacia adelante
d) O está quieta o se desplaza hacia atrás.
e) O está quieta o se desplaza hacia adelante.

107- Responda ahora el ejercicio anterior si la mesa es de paño.

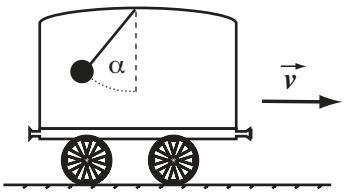
108- (i) En un viaje en tren cierto viajero está cómodamente sentado en su asiento mirando en el sentido del movimiento del tren. Observa una araña, colgada verticalmente de un hilo del techo, frente a él. En cierto momento, la araña se aproxima peligrosamente a su cara. ¿Cuáles serían los motivos de ese acercamiento?

a) La araña quiere prolongar su tela hasta su cara.
b) El tren está aumentando su rapidez.
c) La araña sólo puede estar equilibrada con una fuerza en el sentido en el que se mueve el tren.
d) El tren está frenando, para detenerse en una próxima estación.

(ii) Pasada la primera parte de su trayecto, en otro momento, se da cuenta de que la araña, que cuelga del extremo de su hilo, se desvió hacia su derecha. Este hecho provoca las siguientes nuevas reflexiones, ¿cuáles de todas estas observaciones serán correctas?

a) El tren está por volcar.
b) La araña sólo puede estar equilibrada con una fuerza horizontal hacia la derecha del pasajero.
c) El tren está realizando una trayectoria curvilínea hacia la izquierda.
d) El tren está dando una curva hacia la derecha.

109- El péndulo de la figura está colgado, en reposo respecto del vehículo, del techo de un vehículo que se mueve de izquierda a derecha.



a) ¿El vehículo está frenando, acelerando o se mueve con velocidad constante?

b) ¿Cuál sería la respuesta a la pregunta anterior si la posición observada del péndulo fuese vertical?

110- Un ascensor sube con aceleración constante de 3 m/s^2. Tres segundos después que el ascensor comenzó a acelerar a partir del reposo, un pasajero deja caer una moneda desde una altura de 1 metro por sobre el piso del ascensor. Encuentre el tiempo que tarda la moneda en chocar contra el piso. Realice los cálculos tomando como referencia un sistema fijo al ascensor y uno fijo a tierra. '

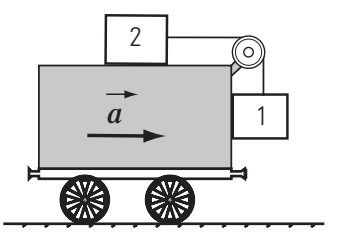
111- Un hombre quiere mover una caja de 10 kg que está apoyada sobre el piso de un vagón en reposo, sobre una vía horizontal. Para eso necesita hacer una fuerza de 5 kgf. Luego el vagón está acelerado y el hombre tiene ahora que hacer una fuerza horizontal de 3 kgf para mover la caja. ¿Qué aceleración lleva el vagón?

112- (Opcional) Dado el sistema de la figura, los coeficientes de rozamiento estático en las superficies horizontal y vertical son μ_{e1} y μ_{e2}, respectivamente.

¿Para qué valores de la aceleración a, la masa m_1 no sube ni baja?

Datos:
$\mu_{e1} = \mu_{e2}$;

$m_1 = m_2$.



113- Un paquete de masa m se encuentra a una distancia r del eje de una calesita de radio $R > r$, que gira con velocidad angular constante ω.

a) Si el paquete no desliza sobre el piso de la calesita:

i. Grafique todas las fuerzas de interacción y las que forman pares con ella que actúan sobre m. Indique cuales son y dónde se hallan aplicados sus pares de interacción.

ii. ¿Cuál es la aceleración del paquete respecto de un sistema de referencia inercial S fijo a Tierra? Es compatible esto con las ecuaciones de movimiento?

iii. ¿Cuál es la aceleración del paquete respecto de un sistema de referencia no inercial S' fijo a la calesita? ¿Es compatible esto con las ecuaciones de movimiento?

iv. ¿Qué fuerza debe "agregar" un observador en el sistema S' para compatibilizar sus observaciones con los resultados obtenidos a partir de las ecuaciones de Newton?

¿Cuál es la dirección y sentido de esta fuerza? ¿Existe una correspondiente reacción?

b) Considere ahora que la masa m permanece en reposo respecto de S y que no hay rozamiento entre ella y la calesita.

Repita los incisos (i), (ii) y (iii) de la parte a)

iv. ¿Qué velocidad $\vec{v}'$ tiene el paquete respecto de S'?

v. Verifique que no basta con introducir la fuerza inercial postulada en a)-iv para explicar el movimiento del paquete tal como lo observa respecto del sistema S'.

vi. ¿Qué nueva fuerza inercial tiene que "agregar" ahora para que haya compatibilidad con las ecuaciones de Newton? Observe que esta nueva fuerza está relacionada con $\vec{v}'$ (en el inciso a) no aparece pues allí $|\vec{v}'|=0$).

114- Del techo de un ascensor cuelga un resorte con una bolita de masa m en su extremo libre; la bolita se encuentra en reposo respecto del piso del ascensor. Un observador situado dentro del ascensor mide la longitud del resorte (L) en tres situaciones diferentes,

a) cuando el ascensor permanece en reposo, L_R

b) cuando el ascensor arranca y sube, L_A,

c) cuando el ascensor sube y frena, L_F.

Entonces, la relación entre las tres longitudes es:

a) $L_R = L_A = L_F$ b) $L_A = L_F > L_R$

c) $L_A > L_R > L_F$ d) $L_A < L_R < L_F$

e) $L_A < L_F = L_R$

115- De un resorte de 0,50 m de longitud, sujeto al techo de un autobús, se suspende un cuerpo de 4 kg que le produce un alargamiento de 0,10 m, respecto de su longitud sin carga. Si en cambio el autobús se mueve con una aceleración constante de 8 m/s^2, determinar el ángulo que formará el resorte con la vertical y su longitud mientras el autobús mantiene la aceleración.

Respuestas

Leyes de la Dinámica

1- a) $|\vec{T}|$= 400 N b) $|\vec{T}|$ = 400 N

c) $|\vec{T}|$ = 480 N d) $|\vec{T}|$ = 320 N e) $|\vec{T}|$ = 0 N

2- b) subiendo cada vez más despacio

3- a) ≠ 0 N b) $|\vec{a}|$ = 0 m/s^2 c) $|\vec{a}| = |\vec{g}|$

4- De elaboración personal.

5- a) $|\vec{a}| = |\vec{g}|$sen α = 5 m/s^2 b) $\alpha \approx 53°$

6- De elaboración personal.

7- a) y b) $|\vec{F}|$ = 600 N c) y e) $|\vec{F}|$ = 780 N

d) y f) $|\vec{F}|$ = 420 N g) $|\vec{F}|$ = 0 N

8- De elaboración personal.

9- De elaboración personal.

10- a) De elaboración personal.

b) De elaboración personal.

c) El carácter vectorial es de elaboración personal, los módulos de las interacciones son:

i) $|\vec{N}| = m|\vec{g}|$ ii) $|\vec{N}| = m|\vec{g}| + |\vec{F}|$

iii) $|\vec{N}| = m|\vec{g}| - |\vec{F}|\,\text{sen}\,\alpha$ iv) $|\vec{N}| = m|\vec{g}|\cos\alpha$

v) $|\vec{N}_A| = m_A|\vec{g}|$ $|\vec{N}_B| = (m_A + m_B)|\vec{g}|$

vi) $|\vec{N}_A| = m_A|\vec{g}| - |\vec{F}|\,\text{sen}\,\theta$

$|\vec{N}_B| = m_A|\vec{g}| - |\vec{F}|\,\text{sen}\,\theta + m_B|\vec{g}|$

vii) $|\vec{N}| = |\vec{F}|$

d) El carácter vectorial es de elaboración personal, los módulos de las aceleraciones son:

i) 0 ; ii) 0 ;

iii) $|\vec{a}| = |\vec{F}|\cos\alpha / m$

iv) $|\vec{a}| = |\vec{g}|\,\text{sen}\,\alpha$

v) $|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = 0$

vi) $|\vec{a}_A| = |F|\cos\theta / m_A$ $|\vec{a}_B| = 0$

vii) $|\vec{a}| = |\vec{g}|$

11- b, c, f

12- De elaboración personal.

13- De elaboración personal.

14- a) $|\vec{a}_P|$ = 0,5 m/s^2 b) $|\vec{a}_J|$ = 0,075 m/s^2;

c) d = 1,96 m.

15- *(Denominamos $\vec{T}_{ij}$ a la tensión en la soga que une el cuerpo i y j).*

a) y b) De elaboración personal.

Sistema A:

c) $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = |\vec{F}|/3\ m$;

d) $|\vec{T}_{23}| = |\vec{F}|/3$ $\quad |\vec{T}_{12}| = 2\,|\vec{F}|/3$

e) $|\vec{F}_{R1}| = |\vec{F}_{R2}| = |\vec{F}_{R3}| = m\,|\vec{a}| = |\vec{F}|/3$

Sistema B:

c) $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = (|\vec{F}| / 3m) - |\vec{g}|$

d) $|\vec{T}_{23}| = |\vec{F}|/3$ $\quad |\vec{T}_{12}| = 2|\vec{F}|/3$

e) $|\vec{F}_{R1}| = |\vec{F}_{R2}| = |\vec{F}_{R3}| = m\,|\vec{a}| = |\vec{F}|/3 - m|\vec{g}|$

16- a) $|\vec{F}| = 500$ N $\quad$ b) $|\vec{T}| = 200$ N

c) $|\vec{F}| = 700$ N $\quad |\vec{T}| = 280$ N

d) $|\vec{a}| = |\vec{g}|$ sen 30° = 5 m/s²;

$|\vec{T}| = 0$ N

Justo después de suprimir la fuerza se mueve hacia arriba cada vez más despacio hasta detenerse, y luego continúa moviéndose hacia abajo cada vez más rápido.

17- De elaboración personal.

18- a) De elaboración personal.

b) De elaboración personal.

c) $|\vec{a}_A| = 2{,}5$ m/s²; $|\vec{a}_B| = 2$ m/s² ; $|\vec{a}_C| = 2$ m/s²

19- a) $m_1 = 4$ kg $\quad$ b) $|\vec{v}_2| = 4$ m/s

c) $H_{max1} = 4{,}8$ m $\quad$ d) $|\vec{F}_T| = 96$ N

e) De elaboración personal.

f) De elaboración personal.

20- a) $|\vec{a}| = 4$ m/s² y el sistema está frenando;

$|\vec{T}| = 360$ N

b) $|\vec{a}_A| = 10$ m/s² y $|\vec{a}_B| = 5$ m/s²

(A primero sube un poco más hasta detenerse y después cae; B cae)

c) De elaboración personal.

21- a) $|\vec{a}_A| = |g|\,(m_B + m_C) / (m_A + m_B + m_C)$

b) $|\vec{F}_{cuerda}| = m_A\,|\vec{g}|\,(m_B + m_C) / (m_A + m_B + m_C)$

c) $|\vec{F}_{BC}| = m_A m_C\,|\vec{g}|\,/\,(m_A + m_B + m_C)$

d) De elaboración personal.

e) $|\vec{a}_A| \approx |\vec{g}|$

22- a) $|\vec{a}| = 5/3$ m/s²

b) $|\vec{T}| = 8750/3$ N

c) $|\vec{F}_{AC}| = 1750/3$ N $\quad |\vec{F}_{BC}| = 1250/3$ N

23- a) De elaboración personal.

b) $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| = 630$ N ; $|\vec{F}_C| = 1260$ N

c) $|\vec{F}_{zapatos}| = 210$ N

24- $|\vec{a}_1| = 2{,}5$ m/s²; $|\vec{a}_{polea}| = 1{,}25$ m/s² ; $|\vec{T}| = 10$ N

25- a) $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = 6$ m/s²; $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = 24$ N

b) $|\vec{a}_1| = 2\,|\vec{a}_2| = 5{,}45$ m/s²; $|\vec{T}_1| = ½\,|\vec{T}_2| = 21{,}81$ N

c) $|\vec{a}_1| = ½\,|a_2| = 4{,}28$ m/s²; $|\vec{T}_1| = 2\,|\vec{T}_2| = 17{,}1$ N

Fuerza de rozamiento

26- a) Sí $\quad$ b) $|\vec{a}| = 2$ m/s²

27- a) $d = 62{,}5$ m

b) De elaboración personal.

28- a) $|\vec{a}| = 1{,}6$ m/s²

b) $\mu_d = 0{,}16$

29- a) $|\vec{a}| = 3$ m/s²

b) $|\vec{a}| = 3{,}5$ m/s²

c) $|\vec{a}| = 0{,}66$ m/s²

30- $\mu_e = 0{,}6$ $\quad \mu_d = 0{,}2$

31- $\alpha_{max} = 31°$ $\quad |\vec{a}| = 3{,}43$ m/s²

32- a) $|\vec{F}| = 180$ N; $|\vec{a}| = 3$ m/s²; $|\vec{F}_{AB}| = 120$ N.

b) $|\vec{F}| = 240$ N

33- a) $|\vec{P}| = 17{,}5$ N $\quad$ b) $m = 1{,}4$ kg

34- a) De elaboración personal.

b) $|\vec{F}| = 11{,}54$ N

c) $|\vec{F}| = 11{,}54$ N

d) $|\vec{F}| = 21{,}22$ N

e) $|\vec{F}| = 4{,}73$ N

35- a) $|\vec{a}| = 1{,}25$ m/s² $\quad \mu_d = 0{,}225$

b) $|\vec{T}| = 350$ N;

c) $|\vec{F}| = 87{,}5$ N

36- b, d, f.

37-a) De elaboración personal.

b) De elaboración personal.

c) i) $|\vec{N}_A| = m_A\,|\vec{g}|$ $\quad |\vec{N}_B| = (m_A + m_B)\,|\vec{g}|$

ii) $|\vec{N}_A| = m_A\,|\vec{g}|$ $\quad |\vec{N}_B| = (m_A + m_B)\,|\vec{g}|$

iii) $|\vec{N}| = |\vec{F}|$

d) i) $|\vec{F}_{Re}| = |\vec{F}|\ m_A\ /\ (m_A + m_B) = 2/7\ |\vec{F}|$

ii) $|\vec{F}_{Re}| = |\vec{F}|\ m_B / (m_A + m_B) = 5/7\ |\vec{F}|$

iii) $|\vec{F}_{Re}| = m_B\,|\vec{g}| = 50$ N

e) $|\vec{F}_{max}| = 14$ N $\quad |\vec{a}_s| = 2$ m/s^2

f) $|\vec{F}_{max}| = 5{,}6$ N $\quad |\vec{a}_s| = 0{,}8$ m/s^2

g) $|\vec{F}_{min}| = 250$ N $\quad |\vec{a}| = 0$ m/s^2

h) i) $|\vec{a}_A| = \mu_d\,|\vec{g}|$

$|\vec{a}_B| = (|\vec{F}| - \mu_d\, m_A\,|\vec{g}|) / m_B$

ii) $|\vec{a}_A| = (|\vec{F}| - \mu_d\, m_A\,|\vec{g}|) / m_A$

$|\vec{a}_B| = \mu_d\,|\vec{g}|\, m_A / m_B$

iii) $|\vec{a}| = |\vec{g}| - \mu_d\,|\vec{F}| / m_B$

38- $|\vec{F}_{min}| = 162$ N

39- a) $|\vec{a}| = 2$ m/s^2

b) $\mu_e = 0{,}2$

40- a) i) $m_C = 10$ kg

ii) Cualquiera sea la masa de C el cuerpo A no se mueve.

b) i) $|\vec{a}| = 2{,}14$ m/s^2

c) $\vec{v}_{AB} = 1{,}07$ m/s $(\hat{i} + \hat{j})$

d) $\mu_e \geq 0{,}4$

e) $|\vec{a}_A| = 0$ m/s^2 $\quad |\vec{a}_B| = |\vec{a}_C| = 2{,}142$ m/s^2

41- a) $|\vec{a}| = 0{,}24$ m/s^2 $\quad |\vec{T}| = 1632$N

b) $|\vec{a}_A| = 8{,}4$ m/s^2 $\quad |\vec{a}_B| = 5{,}2$ m/s^2
De elaboración personal.

42- a) $|\vec{a}| = 1{,}5$ m/s^2 $\quad d = 3$ m

b) $|\vec{a}| = 0{,}375$ m/s^2 $\quad |\vec{v}| = 1{,}5$ m/s

c) $\mu_d = 0{,}0565$; $\alpha = 5{,}38^o$; $|\vec{F}_{roz}| = 11{,}25$ N.

43- $|\vec{F}_{min}| = 0{,}067\ m\,|\vec{g}|$ $\quad |\vec{F}_{max}| = 0{,}935\ m\,|\vec{g}|$

44- Caso A: $|\vec{F}_{max}| = 420$ N ; $|\vec{a}_1| = 8{,}17$ m/s^2

Caso B: $|\vec{F}_{max}| = 480$ N ; $|\vec{a}_2| = 14$ m/s^2

Caso C: $|\vec{F}_{max}| = 540$ N ; $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = 6{,}3$ m/s^2

Caso D: $|\vec{F}_{max}| = 300$ N ; $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = 3{,}5$ m/s^2

45- $\mu_e \geq 0{,}192$

46- a) i) $|\vec{a}| = 0{,}87$ m/s^2 $\quad |\vec{F}_B| = 15{,}75$ N

ii) De elaboración personal.

b) i) $|\vec{a}| = 2{,}64$ m/s^2 $\quad |\vec{F}_B| = 15{,}75$ N

ii) De elaboración personal.

c) $\mu_d = 0{,}25 \rightarrow |\vec{a}| = 2{,}835$ m/s^2 $\quad |\vec{F}_B| = 0$ N

$\mu_d = 0{,}5 \rightarrow |\vec{a}| = 0{,}67$ m/s^2 $\quad |\vec{F}_B| = 0$ N

d) De elaboración personal.

47- De elaboración personal.

48- a) $|\vec{a}| = 6{,}67$ m/s^2

b) $|\vec{a}| = 4{,}67$m/s^2

c) $|\vec{v}_T| = 10$ m/s

d) $|\vec{r}| = 8{,}95$ m

$|\vec{v}| = 7{,}36$ m/s

$|\vec{a}| = 1{,}76$ m/s^2

Dinámica del movimiento circular

50- a) $\tau = 1{,}26$ s

b) $|\vec{a}_C| = 20$ m/s^2

c) $|\vec{F}_c| = 5$ N

51- $|\vec{v}| = 20$ m/s

52- a) $|\vec{v}_{min}|^2 = |\vec{g}|\ L = 4{,}5$ m^2/s^2;

b) en el de más abajo

c) $|\vec{v}_{max}| = 3$ m/s

53- a) $|\vec{F}_{alto}| = 5{,}11$ N; $|\vec{F}_{bajo}| = 9{,}11$ N.

b) $|\vec{v}_{max}| = 9$ m/s

c) $|\vec{v}_{min}| = 3$ m/s.

54- a) $|\vec{T}| = 28{,}6$ N

b) $\omega = 4{,}36$ rad/s

55- b, d, f.

56- c, d, e.

57- 25000 N

58- a) 2667 N

b) $\mu_e \geq 0{,}27$

59- a) i) $|\vec{v}_{seco}| \approx 47$ m/s ii) $|\vec{v}_{lluvia}| \approx 39$ m/s

iii) $|\vec{v}_{hielo}| \approx 27$ m/s

b) i) $\alpha_{seco} \approx 37°$ ii) $\alpha_{lluvia} \approx 27°$

iii) $\alpha_{hielo} \approx 14°$

c) $|\vec{v}_{seco}| \approx 50$ m/s $|\vec{v}_{lluvia}| = 41$ m/s

$|\vec{v}_{hielo}| = 30$ m/s

$|\vec{v}|^2 = R\ |\vec{g}|\ (\text{sen } 3° + \mu_e \cos 3°)/(\cos 3° - \mu_e \text{ sen } 3°)$

Los valores calculados son independientes de la masa..

60-a) $|\vec{T}| = 20$ N; $f \approx 40$ RPM

b) $f \approx 30$ RPM

c) De elaboración personal.

61- a) MCU

b) $\omega = 1{,}60$ rad/s; no.

c) $|\vec{T}| = 57{,}73$ N

d) Aumenta; aumenta.

e) De elaboración personal.

62- a) $|\vec{N}| = 14{,}32$ N

b) $|\vec{T}| = 49{,}5$ N

c) $\omega = 1{,}60$ rad/s $|\vec{T}| = 57{,}73$N

d) De elaboración personal.

63- $|\vec{F}| = 6317$ N

64- a) $\omega \approx 1$ rad/s

b) $|\vec{T}| = 566$ N

65- $|\vec{v}| = 2$ m/s $|\vec{a}_T| = 0$ m/s^2 $|\vec{a}_C| = 40$ m/s^2

66- a) F
b) F
c) V
d) V
e) F
f) F
g) F
h) V
i)V
j) F
k) F
l) F
m) F
n) V

Interacción gravitatoria

67- $|\vec{F}| = 3 \times 10^{-6}$ N

68- De elaboración personal.

69- $m_{Sol} = 2 \times 10^{30}$ kg

$|\vec{v}_{TS}| = 3 \times 10^4$ m/s = $10{,}8.10^4$ km/h

70- a) $\tau \approx 5552$ s ≈ 92 min

b) $|\vec{v}_E| \approx$ 27747 km/h

71- $\omega_A = 1/8\ \omega_B$ y $R_A = 4\ R_B$

72- $|\vec{F}| \approx 2 \times 10^{20}$ N

73- $|\vec{P}_{pL}| = 138{,}2$ N

74- $|\vec{P}_{mM}| = |\vec{P}_{Mm}| \approx 7{,}71$ N

75- $d = \sqrt{10}\ R_T$

76- $d \approx$ 35900 km medidos desde la superficie terrestre.

77- $d \approx$ 345000 km medidos desde el centro de la Tierra.

78- De elaboración personal. $|\vec{P}| = 700$ N

79- a)De elaboración personal.

b) De elaboración personal.

c) $|\vec{F}_{cs\,(A)}| \approx 4 \times 10^{12}$ N; $|\vec{F}_{cs\,(B)}| \approx 1 \times 10^9$ N;

$|\vec{a}_{cs\,(A)}| \approx 18{,}2 \times 10^{-3}$ m/s^2 ; $|\vec{a}_{cs\,(B)}| \approx 4{,}7 \times 10^{-6}$ m/s^2.

d) De elaboración personal.

Fuerza elástica

80- a) $k_e = 80$ N/

b) $\Delta l = 0{,}75$ m

81- a) $|\vec{F}_e| = 15$ N

b) $l = 77$ cm

82- a) $l_0 = 0{,}2$ m

b) $k_e = 1500$ N/m

83- De elaboración personal.

84- $\Delta l = 20$ cm

85- a) k_e = 600 N/m

b) $|\vec{a}|$ = 2,5 m/s²;

c) Δl = 0,2 m

d) $|\vec{a}|$ = 12,5 m/s²; hacia abajo;

e) De elaboración personal.

86- a) $|\vec{F}_r|$ = 20 N ; $|\vec{F}_{techo}|$ = 120 N; $|\vec{a}|$ = 15 m/s²

b) $|\vec{F}_r|$ = 30 N ; $|\vec{F}_{techo}|$ = 20 N; $|\vec{a}|$ = 2,5 m/s²

c) $|\vec{F}_r|$ = 0 N ; $|\vec{F}_{techo}| = 2\, m_A|\vec{g}|$; $|\vec{a}|$ = 10 m/s²

87- Δl = 0,0625 m

88- a) x_{eq} = 0,24 m

b) l_{max} = 0,432 m

c) l_{min} = 0,048 m

89- a) x_{eq} =1,08 m;

b) l_{max} = 1,224 m

c) l_{min} = 0,936 m.

90- a) $l_{eq} = m_B\,|\vec{g}| / k + l_0$

$|\vec{F}_{pared\text{-}resorte}| = m_B\,|\vec{g}|$

b) $|\vec{a_A}|(t = 0\text{ s}) = m_B\,|\vec{g}| / (m_B + m_A)$

c) $\mu_e = m_B / m_A - k\,(l - l_0) / (m_A|\vec{g}|)$

91- a) Si no hay rozamiento el sistema nunca puede estar en equilibrio.

b) $|\vec{a_A}|$= 0 m/s² $\quad |\vec{a_B}| = |\vec{g}|$

c) $\mu_e = m_B / m_A$

$l = m_B|\vec{g}| / k + l_0$

92- a) y b) De elaboración personal.

c) $k_A = k_{serie} = k_1\, k_2 /(k_1 + k_2)$

$k_B = k_{paralelo} = k_1 + k_2$

93- $2k$

94- a) l = 0,95 m

b) $l = k\, l_0 / (k - m\,\omega^2)$

95- a) Δx = 0,02 m

b) θ = 60,2°

Movimiento armónico simple

96- De elaboración personal.

97- a) $\tau = \pi/4$ s = 0,785 s

b) $x'' + 64\text{ s}^{-2}\, x = 0$

c) t = 0,59 s $\qquad v$ = 1,6 m/s

d) $t_{\{-0,1m\}} = t_i = \pi/12$ s

e) $v(t_i) = -0,2\,.\,8$ m/s sen $(8\text{ s}^{-1}\, t_i)$ =
$= -1,6$ m/s sen $(2/3\pi) = -1,38$ m/s

$a(t_i) = -0,2\,.\,64$ m/s² cos $(2/3\,\pi) = 6,4$ m/s²

f) De elaboración personal.

98- a) $x(t) = 0,2$ m sen$(5\text{ s}^{-1}\, t)$

$v(t) = 1$ m/s cos$(5\text{ s}^{-1}\, t)$

$a(t) = -5$ m/s² sen$(5\text{ s}^{-1}\, t)$

b) $t = n\,\pi/5 \quad n$ = 0, 1, 2,....

99- $\omega^2 = k/m$

$x(t) = (l_0 - m|\vec{g}|/k)\cos(\omega t) + (l_0 + m|\vec{g}|/k)$

100- a) ω = 12,9 rad/s;

f = 2,05 Hz.

b) No cambia k, cambia ω = 10 rad/s.

c) τ = 0,625 s y f = 1,6 Hz

101- Siendo:

i) la amplitud angular $\theta_A = A/L$;

ii) la velocidad angular (constante) del movimiento circular asociado es tal que $\omega^2 = |\vec{g}|/L$;

iii) φ = ángulo de la fase inicial →

a) $\theta(t) = \theta_A \cos(\omega t + \varphi)$

b) $d\theta/dt\,(t) = -\omega\,\theta_A$ sen $(\omega t + \varphi)$

c) $\gamma(t) = -\omega^2\,\theta_A \cos(\omega t + \varphi)$

d) Si denominamos x, paralelo al techo, desplazamiento lateral: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

$v(t) = -A\,\omega$ sen $(\omega t + \varphi)$

e) $a_x(t) = a_t(t) = -A\,\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$

$a_c(t) = v(t)\,.\,\omega(t)$

f) $T(t) = m\,(|\vec{g}| \cos\theta(t) + v^2(t)/L)$

T_{max}(péndulo vertical) > Peso

102- a) Período= $\tau = 2\pi/\omega = \pi$ s;

Amplitud, A = 5 cm.

b) $x(t)$= 5 cm cos (2 s^{-1} $t + \pi/6$);

$x(0) = 5\sqrt{3}/2$ cm = 4,33 cm;

$v(t)$= -10 cm/s sen (2 s^{-1} $t + \pi/6$);

$v(0)$ = –5 cm/s;

$a(t)$ = – 20 cm/s^2 cos (2 s^{-1} $t + \pi/6$);

$a(0) = -10\sqrt{3}$ cm/s^2 = –17,32 cm/s^2.

c) $|\vec{v}_{max}|$ = 10 cm/s;

$|\vec{a}_{max}|$ = 20 cm/s^2

103- a) ω = 1,58 rad/s $\tau = 2\pi/\omega$ = 3,97 s

$\varphi = \pi/2$ A = 0,1 m

$x(t)$ = 0,1 m sen (1,58 s^{-1} $t + \pi/2$)

$v = dx/dt$ = 0,158 m/s cos (1,58 s^{-1} $t + \pi/2$)

$a = dv/dt$ = (–0,1) $(1,58)^2$ m/s^2 sen (1,58 s^{-1} $t + \pi/2$)

b) 1,58 $t + \pi/2 = \pi \rightarrow t = \pi/(3,16) \approx 1$ s

c) $|\vec{v}_{max}|$ = 15,8 cm/s;

$|\vec{a}_{max}|$ = 25 cm/s^2

Sistemas no inerciales

104- De elaboración personal.

105- De elaboración personal.

106- b

107- d)

108- (i) b
(ii) c

109- a) Acelerando

b) Velocidad constante

110- t = 0,39 s

111- $|\vec{a}|$ = 2 m/s^2

112- $(1 - \mu_{e1})/(1 + \mu_{e1}) \leq |\vec{a}|/|\vec{g}| \leq (1 + \mu_{e1})/(1 - \mu_{e1})$

113- De elaboración personal.

114- c

115- El ángulo es de 38,7° y la longitud de 0,628 m (se alarga 0,128 m).

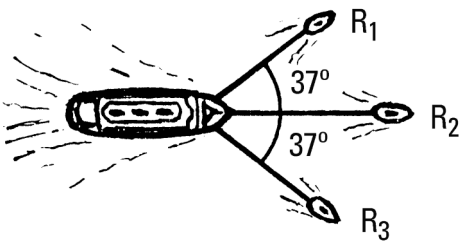
Leyes de conservación

1_ Trabajo y energía

1.1- Un joven ejerce una fuerza horizontal constante de 200 N sobre un objeto que avanza 4 m. El trabajo realizado por el joven es de 400 J. El ángulo que forman la fuerza con el desplazamiento es:

a) 60° b) 30 c) 45°
d) 53° e) ninguna de las anteriores

1.2- Tres remolcadores llevan un barco hacia su dársena, tirando cada uno con una fuerza constante de 3.10^5 N en un recorrido de 500 m, como indica la figura. Si la fuerza de rozamiento que ejerce el agua sobre el barco es de 10^5 N, determinar:



a- La resultante de las fuerzas que actúan sobre el barco.

b- El trabajo que realiza la fuerza resultante.

c- El trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan.

d- La suma de los trabajos calculados en **c**. Comparar con el resultado del inciso **b**.

1.3- Un balde de 15 kg es levantado 4 m, aplicándole una fuerza vertical $\vec{F}$ cuyo módulo constante es 18 kgf. Determinar:

a- El trabajo que realiza la fuerza $\vec{F}$.

b- El trabajo que realiza la fuerza peso.

c- La velocidad que alcanzará el balde, si inicialmente estaba en reposo.

1.4- Claudia pesa 60 kgf, y viaja en un ascensor desde el piso 4° hasta planta baja. Hallar el trabajo que realiza la fuerza que hace el piso del ascensor («normal») sobre ella, en los siguientes tramos de 4 m de longitud cada uno:

a- Arranque con aceleración constante, de 0,5 m/s^2

b- Descenso con velocidad constante de 2 m/s

c- Frenado con aceleración constante, de 0,5 m/s^2.

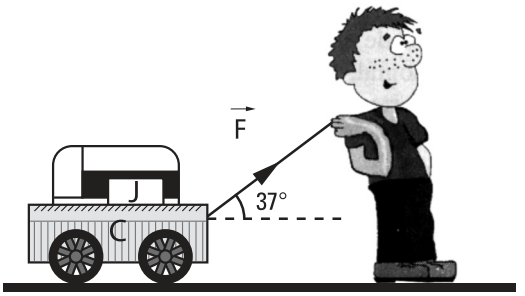
1.5- Nicolás corre 4 m tirando de su carrito, con la caja de juguetes encima, con la fuerza constante de 30 N en la dirección indicada en la figura. (Ver Problema **2.19** de Dinámica).

El carrito tiene 10 kg y la caja 2 kg, y el rozamiento entre el carrito y el piso es despreciable. Calcular:

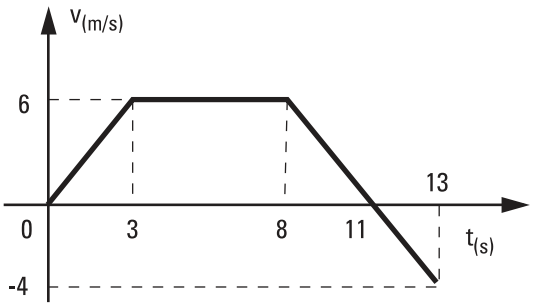
a- El trabajo que realiza la fuerza de rozamiento sobre la caja J.

b- El trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre el carrito

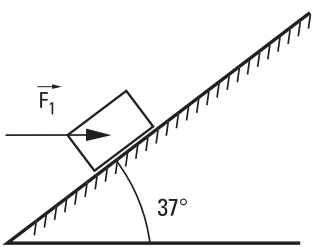
c- La velocidad que alcanza cada objeto, si al partir estaban en reposo.



1.6- En el gráfico de la figura se representa la velocidad escalar de un móvil de 20 kg, en función del tiempo. Determinar el trabajo que realiza la fuerza resultante de las que actúan sobre el mismo, para las distintos etapas de su movimiento, y para el viaje total.



1.7 El bloque de 50 kg asciende por el plano inclinado de la figura y recorre 2 m sobre el mismo, con la fuerza horizontal constante $\vec{F}_1$ aplicada, de 600 N. También actúa una fuerza de rozamiento de 100 N.



Hallar:

a- El trabajo que realiza $\vec{F}_1$

b- El que realiza la fuerza de rozamiento.

c- El que realiza el peso del bloque.

d- El que realiza la fuerza de vínculo, normal al plano.

e- La fuerza resultante que actúa sobre el bloque, y su trabajo.

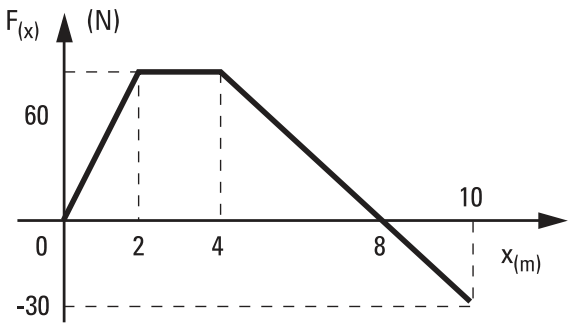
f- La velocidad del bloque luego de ascender los 2 m, si al comienzo tenía una velocidad de 0,6 m/s.

g- Las energías cinéticas inicial y final del bloque.

1.8- Valiéndose de consideraciones de trabajo y energía cinética, demostrar que si el conductor de un vehículo cuya masa es **m** y que marcha con velocidad **v** por una ruta horizontal aplica a fondo los frenos, la distancia en que se detiene es $\mathbf{d} = v^2/2\mu|g|$, en donde **μ** es el coeficiente de rozamiento dinámico entre sus neumáticos y el pavimento.

¿En qué factor se incrementa la distancia de frenado, si el vehículo duplica su velocidad?.

1.9- El gráfico de la figura representa la componente $\mathbf{F_x}$ de una fuerza que actúa sobre un cuerpo que se mueve sobre una recta paralela al eje **x**, en función de su posición.



Calcular el trabajo que realiza dicha fuerza, en las siguientes etapas:

a- Desde la posición $x_1 = 0$ hasta $x_2 = 4$ m.

b- Entre x_2 y $x_3 = 10$ m.

c- Entre x_1 y x_3.

1.10- Se tiene un resorte cuya longitud sin carga es 0,8 m, y su constante elástica es 500 N/m. Dejando fijo un extremo, se lo estira hasta que su longitud es el doble de la original (Posición A), para luego comprimirlo hasta la mitad de su longitud natural (Posición B).

Se pide:

a- Graficar la componente de la fuerza que ejerce el resorte, en función de su elongación.

b- Determinar el trabajo que realiza la fuerza elástica, al estirarlo desde la posición inicial hasta A.

c- Hallar el trabajo realizado por la fuerza elástica entre las posiciones A y B.

1.11- Una máquina eleva verticalmente una carga de 200 kg mediante una cuerda que se arrolla en un tambor de 20 cm de radio. Determinar la potencia desarrollada por la fuerza que ejerce el cable, cuando el tambor gira a 300 rpm, con velocidad angular constante.

1.12- Una grúa iza verticalmente una caja de caudales de 400 kg, que parte del reposo con aceleración constante durante 2 s, hasta alcanzar una velocidad de 2 m/s; prosigue con ella durante 5 s, para frenar luego y detenerse en otros 2 s.

a- Graficar la velocidad de la caja en función del tiempo.

b- Graficar la fuerza que ejerce el cable, en función del tiempo.

c- Graficar la potencia que desarrolla la fuerza que ejerce el cable, en función del tiempo.

d- A partir de este último gráfico, determinar el trabajo que realiza dicha fuerza, y expresarlo en kWh. Comparar con el trabajo del peso.

e- Determinar la potencia media desarrollada por el cable.

f- Determinar la potencia máxima en todo el proceso.

g- ¿Cuál debería ser la potencia mínima del motor de la grúa? (formular las hipótesis necesarias).

1.13- Sabiendo que la energía eléctrica cuesta $0,08/kWh (8 centavos de pesos por cada kWh de energía), mantener encendida una bombita de 100 W durante todo el día un mes completo (30 días) cuesta:

(considerar 1 kWh = 1000 Wh = 1000 W. 3600 s)

a) $ 57,6 b) $ 12,8 c) $ 5,76

d) $ 1,28 e) ninguno de los anteriores

1.14- La potencia del motor de un vehículo le alcanza para subir por una pendiente de 60° con una velocidad de 10 km/h. Si subiera por otra pendiente de 30°, sin modificar la velocidad, ¿ en qué porcentaje disminuiría la potencia ?

a)13% b) 30% c) 42%

d)50% e) 58% f) 87%

2_ Energía mecánica

2.1- El forzudo Igor levanta una pesa de 200 kg por encima de su cabeza, desde el suelo hasta una altura de 2 m.

a- Hallar el trabajo que realiza la fuerza peso de la misma, en el ascenso.

b- ¿La fuerza que ejerce Igor es constante? Hallar el trabajo que realiza esta fuerza. (Sugerencia: tener en cuenta que las velocidades inicial y final de la pesa son nulas).

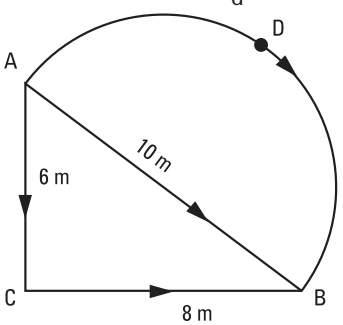
c- Calcular el trabajo que realiza Igor al mantener a la pesa en esa posición durante 10 segundos.

d- Desde la posición anterior, hace descender a la pesa hasta su pecho, quedando a 1,2 m sobre el suelo. Hallar el trabajo que realiza la fuerza peso de la misma, en el descenso.

e- ¿Qué trabajo habría realizado la fuerza peso, si Igor hubiera levantado la pesa desde el piso sólo hasta su pecho? Comparar con la suma de los trabajos hallados en **a** y en **d**.

2.2- Calcular el trabajo que realiza la fuerza elástica en el resorte del problema **1.10** al comprimirlo desde su posición original hasta la mitad de ésta (Posición B). Comparar con la suma de los trabajos calculados en dicho problema. ¿Es conservativa la fuerza elástica? ¿De qué modo puede hallarse el trabajo de la fuerza elástica, sin necesidad de evaluar el área bajo la gráfica fuerza-elongación?

2.3- Determinar el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento que actúa sobre un cuerpo de 20 kg, al desplazarlo desde el punto A hasta el B del esquema (vista desde arriba de las trayectorias) tirando de él con una cuerda paralelamente a la superficie horizontal donde está apoyado, si el coeficiente respectivo es $\mu_d = 0{,}4$:

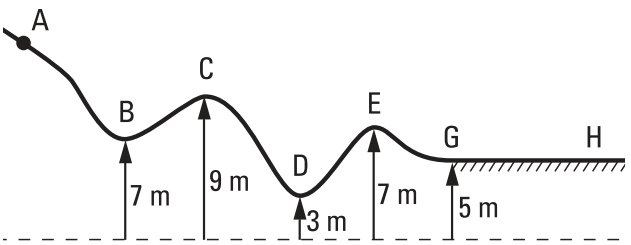


a- Por el camino directo (1)
b- Pasando previamente por C (Camino 2)
c- Por la semicircunferencia ADB (Camino 3)
d- ¿Es conservativa la fuerza de rozamiento?
e- Hallar el trabajo que realiza la fuerza que ejerce la cuerda en cada caso, suponiendo que el objeto se desplaza con velocidad de módulo constante.

2.4- Un Joule es aproximadamente el trabajo necesario para elevar una manzana grande una altura de 50 cm. Discutir esta afirmación.

Una manzana de 200 g proporciona al ingerirla unas 100 cal (418 J). Nuestros músculos transforman en trabajo mecánico sólo un 20% de la energía asimilada. ¿Se podrá levantar una bolsa conteniendo 50 manzanas hasta 2 m de altura, ingiriendo solamente una de ellas y manteniendo constantes las reservas del organismo? ¿Hasta qué altura se podría llegar?

2.5- La figura representa la ladera de una montaña, por la que se desliza con rozamiento despreciable un esquiador de 80 kg. Se sabe que pasa por el punto A con una velocidad de 5 m/s, y pasa por el punto **C** con una velocidad de 10 m/s. Determinar la energía potencial gravitatoria, la energía cinética y la energía mecánica del esquiador en los puntos indicados. Hallar la distancia que necesitará para detenerse en la planicie horizontal, si a partir del punto **G** actúa una fuerza de rozamiento cuya intensidad constante es 500 N.



2.6- Un cuerpo desliza cuesta abajo con velocidad constante en una pendiente. Represente gráficamente la energía cinética, potencial y mecánica en función del tiempo. Represente gráficamente la energía cinética, potencial y mecánica en función de la altura.

2.7- Una cinta transportadora hace subir cajas a velocidad constante por una pendiente inclinada 35° respecto la horizontal. Durante este proceso:

La energía mecánica de las cajas:
a) disminuye
b)aumenta
c) permanece constante.

La fuerza de rozamiento:
a) le quita energía
b) le agrega energía
c)no influye.

2.8- Se levanta un cuerpo de masa m a una altura **h** con velocidad constante y luego se lo deja caer libremente desde el reposo.

Grafique la energía potencial, cinética y mecánica del cuerpo en función de su altura y del tiempo.

2.9- Graficar en forma aproximada la energía cinética, potencial y mecánica en función del tiempo de un péndulo ideal oscilando (muestre al menos dos oscilaciones completas). Indique las condiciones iniciales que aparecen en su gráfico.

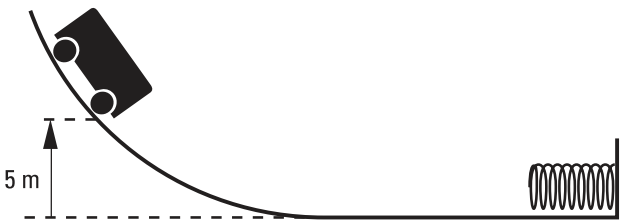
2.10- Una caja de 30 kg es arrastrada en línea recta, apoyada sobre un plano horizontal, aplicándole una fuerza constante de 60 N. Determinar el coeficiente de rozamiento entre la caja y el plano, para que se desplace manteniendo constante su energía mecánica.

La misma caja desciende por un plano inclinado 37°, donde el coeficiente de rozamiento es μ_d=0,25. Determinar qué fuerza paralela al plano la hará moverse con energía mecánica constante.

2.11- Una maquinaria de 2800 N de peso, es elevada a un camión de 1,2 m de altura mediante un plano inclinado de 3 m de longitud. Si se desprecian las fuerzas de roce, el trabajo realizado es de:

a) 3360 J b) 336 J
c) 8400 J d) 840 J
e) ninguna de los anteriores

2.12- Un bloque de 6 kg que está en reposo, se deja caer desde una altura de 5 m por una rampa curva que finaliza en un tramo recto horizontal, como muestra la figura, para el que puede despreciarse el rozamiento en todo el viaje. En la cabecera hay un resorte, inicialmente no deformado, cuya constante elástica es 15000 N/m.



a- Determinar el desplazamiento máximo del extremo del resorte.

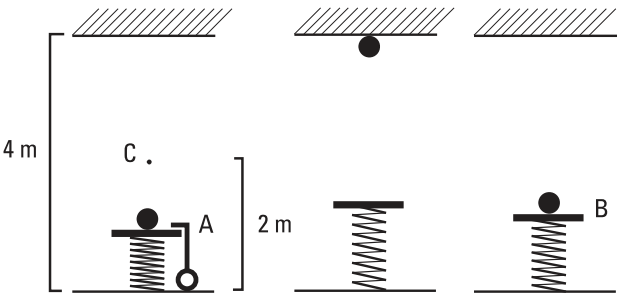
b- Calcular la intensidad máxima de la fuerza que el resorte ejerce sobre la pared.

c- Describir el movimiento del bloque.

2.13- Una caja de 30 kg se desliza por una superficie horizontal con rozamiento, cuyo coeficiente dinámico es μ_d = 0,4, hasta chocar con un resorte horizontal de masa despreciable, cuya constante es 7200 N/m y que inicialmente no posee deformación, al que comprime hasta detenerse en 0,5m. Determinar la velocidad de la caja al llegar al resorte, y la que tenía a 10 m de su extremo.

2.14- Se dejan caer dos cuerpos, partiendo del reposo, desde una misma altura **h**: uno libremente y el otro sobre un plano inclinado con rozamiento despreciable. A partir de consideraciones energéticas, demostrar que ambos llegan al piso con velocidades de igual módulo.

2.15- En la figura se ve una pelota que se mantiene sobre un resorte comprimido 0,5 m. Se libera el resorte y la pelota sale disparada verticalmente, pega en el techo y vuelve sobre el resorte, comprimiéndolo ahora 0,3 m.

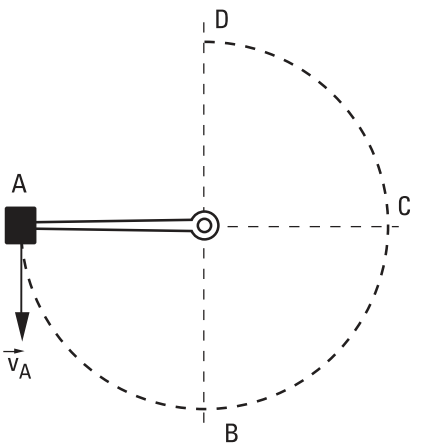


a - ¿Cuál es la energía disipada a causa del impacto en el techo?

b - Compare las velocidades en el punto medio entre el techo y el piso (punto C) cuando sube y cuando baja. Calcúlelas.

Datos:
m = 0,1 kg **k** = 100 N/m **lo** = 1 m

2.16- Una varilla rígida de masa despreciable y de 80 cm de longitud puede girar en un plano vertical, alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos, mientras que al otro extremo está fijo un contrapeso de 2 kg. El contrapeso es lanzado hacia abajo, desde la posición A indicada en la figura.



a- Determinar el vector velocidad en el punto A, si al girar con rozamiento despreciable la varilla se detuvo en posición vertical D.

b- Determinar qué fuerza ejerce la varilla sobre el contrapeso, cuando éste pasa por las posiciones B, C y D, en ese caso.

c- El contrapeso se lanza desde el punto A con la misma velocidad que antes, pero ahora el rozamiento en el eje hace que la varilla se detenga en posición horizontal. Determinar el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento en el recorrido AC.

2.17- Una pesa de 0,3 kg está suspendida del techo por un hilo de 1 m de longitud. Se la aparta de la posición de equilibrio, hasta que el hilo forme un ángulo de 37° con la vertical, y se la deja libre. Despreciando los rozamientos y la masa del hilo, determinar con qué velocidad pasará por el punto más bajo de la trayectoria, y la fuerza que soportará el hilo en ese instante.

Hallar a qué distancia mínima del techo llegará al otro lado.

2.18- Un resorte de masa despreciable, inicialmente sin deformación, está colgado del techo. Se fija una pesa al extremo libre y se la deja descender, apoyada en una mano, desplazándose una distancia **d** hasta alcanzar la posición de equilibrio.

Hallar la distancia que descendería la pesa, si después de fijarla al resorte fuera dejada libre desde la misma posición inicial.

2.19- Un resorte de masa despreciable está apoyado contra el piso, con su eje vertical. Al colocarle encima una caja, el equilibrio se consigue con el resorte comprimido 10 cm por debajo de su posición original. ¿Desde qué altura por encima de su posición inicial deberá dejarse caer la caja sobre él, para que llegue a comprimirse hasta 30 cm por debajo de la misma? Hallar también la velocidad con que pasará por la posición de equilibrio, y hasta qué altura ascenderá luego del rebote, si se desprecian los rozamientos.

2.20- Un péndulo simple de 64 cm de longitud, cuya lenteja tiene una masa de 0,2 kg, pasa por una posición (**O)** tal que el hilo forma un ángulo de 37° con la vertical.

a- Si su velocidad en ese punto es 1,2 m/s, hallar qué velocidad tendrá al pasar por el punto más bajo (**P)**.

b- Cuál deberá ser su mínima velocidad en **O**, para que en algún instante el hilo se halle horizontal (posición **Q**).

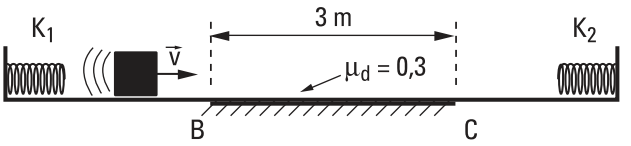
c- Para el caso **a:** cacule la tensión del hilo en **O** y en **P**. Para el caso **b:** calcule la tensión en **Q**.

2.21- Un cuerpo de 4 kg es impulsado por un resorte de constante elástica k_1= 6400 N/m por una pista horizontal en la que el rozamiento es despreciable, salvo en la zona BC donde el coeficiente respectivo es μ_d = 0,3; rebota contra otro resorte de constante k_2, e ingresa nuevamente a la zona con rozamiento, deteniéndose exactamente en el punto B. Hallar:

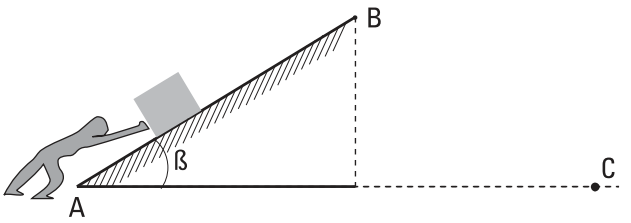
a- La compresión inicial máxima del resorte de constante k_1.

b- La constante elástica del otro resorte, sabiendo que ambos sufrieron idéntica compresión máxima.

c- En qué punto se detendrá al repetir la experiencia con las mismas condiciones iniciales, sustituyendo el resorte **2** por otro con una constante 13 veces mayor.



2.22- Un hombre empuja un paquete de 10 kg a lo largo de un plano inclinado con rozamiento de 2m de longitud. Para ello le aplica una fuerza constante y paralela al plano; en consecuencia el paquete, que estaba inicialmente en reposo en el punto A, abandona el plano con una velocidad de 1,8 m/s, e impacta en el punto C.



a - Realice los diagramas de cuerpo libre para los tramos AB y BC.

b - Hallar el trabajo de la fuerza que aplica el hombre.

c - Calcule el módulo de la velocidad del paquete al llegar al piso, y su altura máxima, utilizando consideraciones energéticas.

d - Calcule el trabajo realizado por la fuerza peso en los tramos AB, BC, y AC.

μ= 0,1 ß=37°

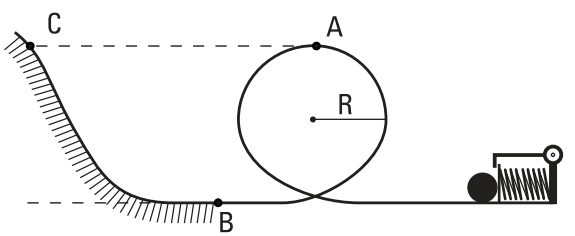
2.23- Un cuerpo es impulsado por un resorte como muestra el esquema de la figura. Considerando que el rozamiento es despreciable en el primer tramo, hasta llegar a B. Hallar:

a- La compresión del resorte para la cual se deja libre la masa si pasa por el punto A con la mínima velocidad posible.

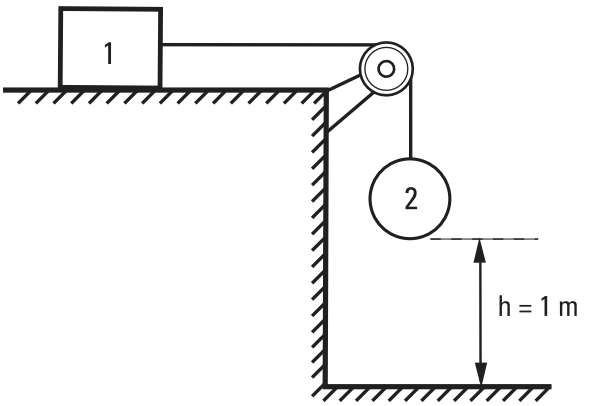
b - El trabajo de la fuerza de rozamiento si es apreciable desde B en adelante, y el cuerpo llega justo hasta el punto C.

Datos:

R = 1m **m** = 2 kg **k** = 200 N/m

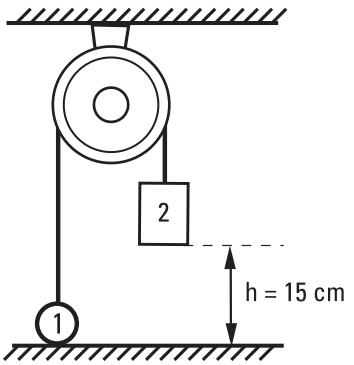


2.24- El sistema esquematizado en la figura parte del reposo; se puede despreciar la masa de la cuerda y de la polea, y el rozamiento en la misma, pero entre el bloque **1** y el plano el coeficiente dinámico es $\mu_d = 0{,}16$. La masa del bloque **1** es 80 kg, y la del bloque 2 es 20 kg. Por consideraciones energéticas, hallar con qué velocidad llegará al piso el bloque **2**.



2.25- El sistema esquematizado en la figura parte del reposo; se puede despreciar la masa de la cuerda y la polea, y todos los rozamientos. La masa del bloque **1** es 22 kg, y la del bloque **2** es 28 kg.

Por consideraciones energéticas, hallar con qué velocidad llegará al piso el bloque **2**.



2.26- Un péndulo cónico está formado por una cuerda de longitud L y un cuerpo de masa m, que describe una trayectoria circular horizontal de radio r, formando un ángulo α constante entre la cuerda y la vertical que pasa por el punto de suspensión. La resistencia del aire y otros rozamientos son despreciables y la energía potencial se mide con respecto al punto de suspensión. ¿Cuál opción es la verdadera?

a) La energía cinética es directamente proporcional al ángulo α.

b) La energía potencial del cuerpo no depende del ángulo α.

c) La energía cinética depende del valor de la aceleración de la gravedad.

d) La energía cinética no depende del valor de la longitud L.

e) La energía cinética no depende del valor de la masa m.

f) El trabajo de la tensión sobre la cuerda es distinto de 0.

2.27- Un camión asciende por una pendiente con velocidad constante.

¿Cuál opción es la verdadera?

a) La energía mecánica del camión permanece constante.

b) La variación de energía cinética del camión es negativa.

c) El peso del camión no realiza trabajo.

d) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es nulo.

e) El trabajo realizado por la resultante de fuerzas sobre el cuerpo es nulo.

f) La energía potencial del cuerpo permanece constante.

Leyes de conservación

NOTA: Los valores y signos de los resultados dependerán del sistema de referencia elegido, por lo que pueden diferir de los aquí consignados. Se ha adoptado el módulo de **g** = 10 m/s^2; 1kgf = 10 N; salvo indicación de lo contrario.

1_ Trabajo y energía

1.1- a)

1.2- **a**: Fuerza resultante: 6,8.10^5 N **i**
b: Trabajo que realiza: 3,4.10^8 J
c: Trabajo de cada fuerza: 1,2.10^8 J; 1,5.10^8 J ; 1,2.10^8 J; -5.10^7 J
d: Suma de los trabajos: 3,4.10^{8}J

1.3- **a**: Trabajo de $\vec{F}$: 720 J
b: Trabajo del peso: -600 J
c: Módulo de su velocidad final: 4 m/s.

1.4- Trabajo:
a- En el arranque: -2280 J
b- En el movimiento uniforme: -2400 J
c- En el frenado: -2520 J

1.5- **a**- Trabajo del rozamiento sobre la caja: +16J
b- Trabajo $F_{Nicolás}$: +96 J
Trabajo $F_{rozamiento\ con\ la\ caja}$: -16 J
Trabajo del peso y trabajo de las fuerzas normales con la caja y con el piso: nulos
c- Velocidad final de ambos: 4 m/s.

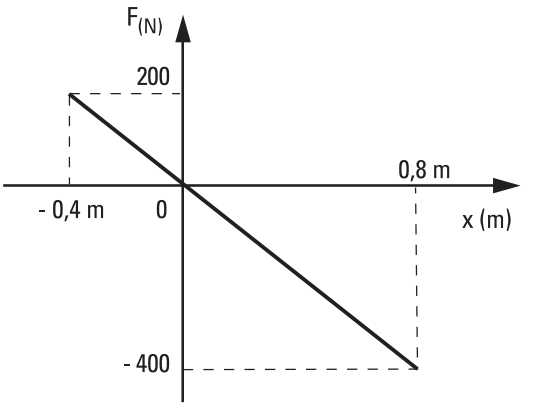
1.6- L[0;3s] = 360 J;
L[3s;8s] = 0;
L[8s;11s] = -360 J;
L[11s;13s] = 160 J ;
Trabajo total: 160 J.

1.7- Trabajo realizado:
a- Por $\vec{F}_1$: +960 J
b- Por la fuerza de rozamiento: -200 J
c- Por la fuerza peso: -600 J
d- Por la fuerza normal de vínculo: 0
e: Fuerza resultante: 80 N hacia arriba, paralela al plano; Trabajo: 160 J.
f: Velocidad: 2,6 m/s.
g: Energía cinética inicial: 9 J; final: 169 J.

1.8- De elaboración personal. La distancia se cuadruplica.

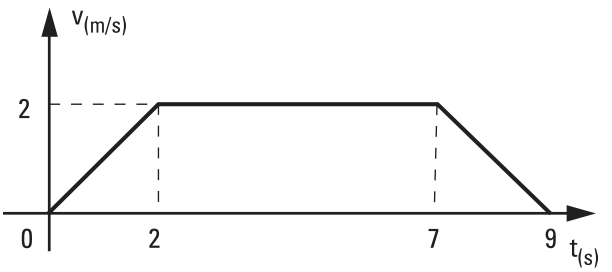
1.9- **a**: Trabajo entre 0 y 4 m: 180 J
b: « entre 4 m y 10 m: 90 J
c: « entre 0 y 10 m: 270 J

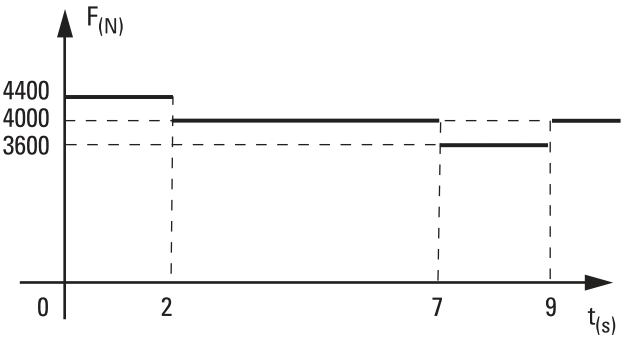
1.10- **a**: Gráfico en columna siguiente
b: Trabajo O A: -160 J
c: Trabajo A B: +120 J

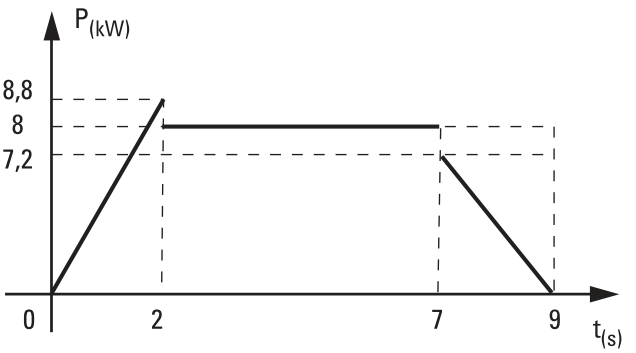


1.11- Potencia constante: = 12,56 kW = 16,86 HP

1.12- **a- b- c-**







d: Trabajo: 56000 J = 0,0155 kWh, es de igual valor absoluto que el trabajo del peso pero de signo opuesto.
e: Potencia media: 6222 W = 8,35 HP
f: Potencia máxima: 8800 W = 11,81 HP

1.13- c)

1.14- c)

2_Energía mecánica

2.1- Trabajos
a: - 4000 J
b: 4000 J (aunque la fuerza no es constante).
c: Cero
d: 1600 J
e: -2400 J

2.2- Trabajo de la fuerza elástica: -40 J = $-\Delta E_{Pe}$

2.3- Trabajo de la fuerza de rozamiento
a: -800 J
b: -1120 J
c: = -1256,6 J
d: No
e: es de igual valor absoluto que el trabajo del rozamiento pero de signo opuesto.

2.4- Suponiendo que la masa de una manzana es 200 g, y despreciando rozamientos, se requiere 1 Joule para elevarla.La energía no alcanza; suponiendo que la bolsa contiene 10 kg, y con las hipótesis del enunciado, llegará a elevarse 83 cm aproximadamente.

2.5- Tomando energía potencial cero en el nivel h_G= 5 m, es:

Punto	Energía cinética (Joule)	Energía potencial (Joule)	Energía mecánica (Joule)
A	1000	6200	7200
B	5600	1600	7200
C	4000	3200	7200
D	8800	-1600	7200
E	5600	1600	7200
G	7200	0	7200

Se detiene luego de recorrer 14,4 m

2.6- De elaboración personal.

2.7- La energía mecánica aumenta. La fuerza de rozamiento le agrega energía

2.8- De elaboración personal.

2.9- De elaboración personal.

2.10- Coeficiente de rozamiento: 0,2
Habrá que empujarla hacia abajo, con una intensidad de 60 N

2.11- a)

2.12- **a**: Se desplaza 20 cm.
b: Transmite 3000 N.

2.13- Módulo de la velocidad inicial: 8 m/s; a 10 m: 12 m/s.

2.14- De elaboración personal.

2.15- **a-** Energía disipada 7,8 J
b- $v_{C\ subida}$= 14,8 m/s; $v_{C\ bajada}$= 8 m/s

2.16- **a**: Módulo de la velocidad en A: 4 m/s
b: $|F_B|$= 100 N; $|F_C|$= 40 N; $|F_D|$= 20 N
c: Trabajo del rozamiento: -16 J.

2.17- Velocidad máxima: 2 m/s
Fuerza sobre el cable: 4,2 N
Mínima distancia al techo: 80 cm.

2.18- Descendería el doble de la distancia **d**.

2.19- Debe soltarse a 15 cm por encima de su extremo.
Pasará moviéndose a 2 m/s.
Llegará hasta la posición de partida.

2.20- **a**: El módulo de su velocidad será 2 m/s.
b: El módulo de la velocidad mínima es 3,2 m/s.

2.21- **a**- Máxima compresión: 15 cm
b- Constante elástica 2: 3200 N/m
c- Se detendrá en el mismo punto.

2.22 **b**: 152,2 J
c:1,26 m y 5,2 m/s
d: -120 J, 120 J, 0

2.23- **a**: 71 cm
b: - 10 J

2.24- El módulo de su velocidad será 1,2 m/s

2.25- El módulo de su velocidad será 0,6 m/s

2.26- c)

2.27- e)